ORSAY
N° d'ordre : 3402

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée

Pour obtenir

Le titre de DOCTEUR 3ème CYCLE
Spécialité : Physique des Gaz et des Plasmas

par

MOHAMED SADRUDDIN MOHAMED-BENKADDA

SUJET : CALCUL DE SEUIL DE STOCHASTICITE ET UNIVERSALITE POUR DES SYSTEMES HAMILTONIENS : APPLICATIONS A LA PHYSIQUE DES PLASMAS

soutenue le 11 Avril 1983 devant la Commission d'examen

MM. V. ALESSANDRINI Président
M. TROCHERIS
C. DEUTSCH
D.F. ESCANDE
G. LAVAL

LIBRARY
LONDON
SCHOOL
OF
ECONOMICS

ORSAY

N° d'ordre :

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée

Pour obtenir

Le titre de DOCTEUR 3ème CYCLE

Spécialité : Physique des Gaz et des Plasmas

par

MOHAMED SADRUDDIN MOHAMED-BENKADDA

SUJET : CALCUL DE SEUIL DE STOCHASTICITE ET UNIVERSALITE POUR DES SYSTEMES HAMILTONIENS : APPLICATIONS A LA PHYSIQUE DES PLASMAS

soutenue le 11 Avril 1983 devant la Commission d'examen

MM. V. ALESSANDRINI Président

M. TROCHERIS

C. DEUTSCH

D.F. ESCANDE

G. LAVAL

الله

محمد رسول الله

Nous avons dénombré toute chose dans un archétype clair.

(CORAN, SOURATE XXXVI)

On ne voit en la création du Tout-Miséricordieux aucune disproportion. Regarde- [la] ! Y vois-tu quelque faille ? Regarde-[la] deux fois [encore] ! Ton regard reviendra vers toi, frustré et recru [sans avoir découvert de défaut].

(CORAN, SOURATE LXVII)

à Nadjat

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547306_0041

R E M E R C I E M E N T S

Monsieur le Professeur V. ALESSANDRINI me fait l'honneur de présider le jury de cette thèse, Messieurs C. DEUTSCH, D.F. ESCANDE, G. LAVAL et M. TROCHERIS celui d'y participer ; qu'ils en soient remerciés.

Monsieur M. TROCHERIS a de plus accepté la tâche ingrate de rapporteur de thèse. Je l'en remercie.

Je voudrais remercier Monsieur D. GRESILLON de m'avoir accueilli dans son équipe au Laboratoire de Physique des Milieux Ionisés et de m'avoir présenté l'activité "Stochasticité Hamiltonienne" qui y était développée.

Je ne saurais décrire ma gratitude et mon admiration à D.F. ESCANDE. Je le remercie chaleureusement de m'avoir initié à la recherche et de m'avoir guidé au long de ce travail.

J'exprime toute ma reconnaissance à F. DOVEIL dont j'ai beaucoup apprécié l'aide qu'il m'a toujours apportée avec gentillesse.

Ce travail a été réalisé au Laboratoire de Physique des Milieux Ionisés de l'Ecole Polytechnique. Je remercie Monsieur H.J. DOUCET son directeur, et Mademoiselle Ch. MOUTTET, sa responsable administrative de m'avoir accueilli et donné tout le support matériel nécessaire.

A Nadjat qui m'apporta un énorme support moral tout le long de ce travail, j'adresse ma profonde gratitude.

A mes parents qui, grâce à leur aide et à leurs sacrifices, j'ai pu entreprendre des études ma reconnaissance est infinie.

Il y a de nombreuses personnes qui m'ont aidé depuis le début de mes études de 3e cycle : chercheurs, camarades de classe et amis ; j'espère qu'ils se reconnaîtront dans ces lignes, qu'ils soient vivement remerciés.

Enfin, c'est grâce à Mademoiselle LECOMTE, Mesdames STEPHAN, MILLARD et ALEXANDRE qui ont assuré la frappe et la reproduction du manuscrit et à Monsieur B. CHAPEY qui a élaboré les figures, que ce manuscrit a pu avoir sa forme définitive ; je leur suis infiniment reconnaissant.

RESUME :

Une méthode basée sur le groupe de renormalisation nous permet de déterminer les seuils de stochasticité grande échelle des systèmes hamiltoniens à deux degrés de liberté et d'observer un comportement universel de ces derniers. On fait une application de cette méthode à des problèmes de la physique des plasmas où la stochasticité intrinsèque intervient.

MOTS CLES :

Groupe de renormalisation, seuils de stochasticité grande échelle, systèmes hamiltoniens, universalité, physique des plasmas.

COMPUTATION OF LARGE SCALE STOCHASTICITY THRESHOLDS AND UNIVERSALITY IN HAMILTONIAN SYSTEMS : APPLICATION TO PLASMA PHYSICS

ABSTRACT :

A renormalization group method allows to determine the threshold of large scale stochasticity in hamiltonian systems with two degrees of freedom. A universility behavior is thus determined for these hamiltonian systems. This method is applied to some plasmas physics problems where the intrinsic stochasticity comes about.

S O M M A I R E

Pages

CHAPITRE O - PRESENTATION 1

CHAPITRE I - INTRODUCTION 5

1. Stochasticité intrinsèque en physique des plasmas 5

2. Etude du mouvement d'une particule chargée dans le champ de deux ondes longitudinales 8

3. Variétés stables et instables 15

CHAPITRE II - APPROXIMATION "DE RESONANCE CENTREE" 17

1. Naissance d'un paradoxe 18

2. Résolution du paradoxe 24

a) Première méthode 24
b) Deuxième méthode 27

3. Approximation de "résonance centrée" 28

4. Etude du hamiltonien à termes linéaires et quadratique en vitesse 29

5. Conclusion 34

CHAPITRE III - RENORMALISATION ET TRANSITION AU CHAOS DANS LES SYSTEMES HAMILTONIENS 35

1. Passage d'un hamiltonien général à l'hamiltonien paradigme 37

2. Transformation de renormalisation T_R 43

a) Approche naïve de la renormalisation 43
b) Ecriture de T_R 44
c) Points fixes de T_R 54

3. Transformation de renormalisation simplifiée t_R 57

a) Ecriture de t_R 57
b) Recherche des points fixes 59
c) Calcul des valeurs propres et directions propres associées aux points fixes de t_R 60
d) Détermination des variétés stables 62

4. Correction aux résultats simplifiés 69

a) Correction aux points fixes 69
b) Correction aux valeurs propres 69
c) Variétés stables $\mathcal{G}_n^\lambda$ 70
d) Hiérarchie des points fixes de T_R 71

5. Seuil de stochasticité grande échelle 73

6. Discussion 75

a) Comparaison de la transformation de renormalisation E.D. et de T_R 76
b) Validité des approximations réalisées pour définir T_R 77

7. Conclusion 83

CHAPITRE IV - APPLICATIONS A LA PHYSIQUE DES PLASMAS 85

1. Rappels 85

2. Application standard 87

a) Application standard et physique des plasmas 87
b) Calcul du seuil de stochasticité grande échelle pour $H^{(S)}$ 93

3. Application de Cohen 101

4. Application de T_R à l'étude de la stochasticité grande échelle d'un hamiltonien de Walker et Ford 111

5. Conclusion 118

CONCLUSION 119

APPENDICE I 121

APPENDICE II 123

APPENDICE III 125

APPENDICE IV 129

APPENDICE V 131

APPENDICE VI 135

REFERENCES 137

CHAPITRE 0

PRESENTATION

Une approche analytique de la transition au chaos dans les systèmes hamiltoniens fondée sur le groupe de renormalisation (K. Wilson, 1975) a été développée par D.F. Escande et F. Doveil (1981). Le caractère fondamental de l'invariance d'échelle, révélée par les calculs numériques dans l'espace des phases, est clairement traduit par cette méthode qui montre que l'étude dans une zone finie de l'espace des phases de tout système hamiltonien à deux degrés de liberté, rendu non intégrable par la présence d'une perturbation périodique, peut se ramener, moyennant quelques approximations, à l'étude du hamiltonien décrivant le mouvement d'une particule dans deux ondes longitudinales.

Le travail de recherche qui a conduit à la rédaction de cette thèse s'est organisé à son début autour de deux axes apparemment déconnectés. Le premier visait à fournir aux physiciens non désireux de pénétrer les arcanes de la renormalisation, un moyen simple de calculer des seuils de stochasticité grande échelle dans un système hamiltonien quelconque en s'inspirant de la méthode d'Escande et Doveil, ce qui oblige en particulier à la construction d'abaques. Le second axe, plus fondamental, consistait à chercher une formulation plus rigoureuse de la transformation de renormalisation, ce qui permettrait un calcul plus précis des seuils.

Ayant testé la méthode d'Escande et Doveil sur des hamiltoniens dont les amplitudes des résonances dépendent linéairement de la vitesse, nous avons obtenu un seuil de stochasticité de grande échelle en désaccord avec celui calculé numériquement. Ce paradoxe apparent a été expliqué analytiquement, ce qui nous a conduit à modifier une des approximations de l'ancienne théorie et à la reformuler sous une forme beaucoup plus explicite et en meilleur accord avec les propriétés universelles observées numériquement, telle que la hiérarchie des points fixes de la transformation de renormalisation, avec la conséquence que les tores dits nobles sont les derniers à disparaître du système.

De plus, cette nouvelle version facilite la poursuite du deuxième axe de recherche en permettant de renormaliser une fois en prenant en compte un nombre quelconque de résonances, ce qui augmente considérablement la précision des seuils de stochasticité grande échelle. Nous avons ainsi réalisé d'une "pierre deux coups"!

Le premier chapitre de cette thèse présente une liste de problèmes de physique des plasmas où la stochasticité intrinsèque intervient, puis illustre la notion de chaos hamiltonien sur l'exemple du mouvement d'une particule chargée en présence de deux ondes longitudinales. La fin de ce chapitre définit quelques outils mathématiques (variété stable $\mathcal{V}_n^{\lambda}$ d'un point fixe, en particulier) utilisés dans cette thèse.

Le second chapitre est consacré à l'étude de hamiltoniens du type de celui qui décrit le mouvement d'une particule dans deux ondes où maintenant l'amplitude des résonances est fonction de la vitesse. Cette étude révèle un désaccord entre la méthode originale d'Escande et Doveil et les calculs numériques concernant les seuils de stochasticité de grande échelle de tels hamiltoniens. Une explication analytique de ce désaccord est donnée qui suggère de modifier l'une des approximations de la théorie.

Dans le troisième chapitre, nous construisons une nouvelle version de la transformation de renormalisation d'Escande et Doveil (notée T_R) pour le système hamiltonien :

$$H(v, x, t) = \frac{1}{2} v^2 - M \cos x - P \cos k (x - t)$$

dépendant des paramètres M, P et k, qui présentent toutes les propriétés génériques d'un hamiltonien à deux degrés de liberté. L'espace des phases de ce système comme de tout système hamiltonien présente une certaine invariance d'échelle qui est reflétée par T_R. Cette transformation agit comme un microscope dans l'espace des phases. L'itération de T_R correspond à un grossissement plus fort et à un nouvel hamiltonien H. Si la suite de H ainsi engendrée a des amplitudes M et P qui tendent vers zéro, la région

de l'espace considérée contient des barrières qui empêchent la stochasticité grande échelle, appelées tores de K.A.M. Si ces amplitudes tendent vers l'infini, ces tores sont détruits. On montre que le calcul du seuil de stochasticité de grande échelle pour H revient au calcul de la variété stable d'un point fixe particulier de T_R. La fin du chapitre compare l'ancienne version de la transformation de renormalisation et la nouvelle, puis discute les approximations réalisées pour définir T_R.

Enfin, le quatrième chapitre est consacré à l'application de T_R au calcul du seuil de stochasticité grande échelle de deux systèmes hamiltoniens suggérés par la physique des plasmas et d'un hamiltonien étudié par Walker et Ford dans un article très souvent référencé dans la littérature.

ABREVIATIONS UTILISEES DANS CETTE THESE

E.D.	Transformation de renormalisation d'Escande et Doveil.
S.G.E.	Stochasticité Grande Echelle
A.T.F.P.	Approximation de trajectoire faiblement perturbée
A.R.C.	Approximation de résonance centrée
T_R	Transformation de renormalisation construite dans cette thèse

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

Contrairement à l'idée "naïve" très commune sur la stochasticité (qui serait associée à des systèmes à très grand nombre de degrés de liberté soumis à des évènements aléatoires), des systèmes très simples (à deux et trois degrés de liberté) peuvent présenter un comportement chaotique appelé stochasticité intrinsèque. Quand on fait varier un paramètre, un tel système peut passer d'un mouvement régulier à un mouvement chaotique. Ce phénomène s'appelle : transition à la stochasticité intrinsèque.

Nous passerons tout d'abord en revue quelques grands problèmes de la physique des plasmas où intervient la stochasticité intrinsèque des systèmes hamiltoniens à deux degrés de liberté. Ensuite, nous définirons plus précisément la stochasticité intrinsèque à partir de l'étude du hamiltonien qui décrit le mouvement d'une particule chargée dans le champ de deux ondes longitudinales. Enfin, nous présenterons quelques concepts et définitions mathématiques nécessaires à la bonne compréhension des résultats de cette thèse.

1. STOCHASTICITE INTRINSEQUE EN PHYSIQUE DES PLASMAS.

La physique des plasmas nous offre un ensemble assez important d'exemples où la stochasticité intrinsèque intervient. Parmi ces derniers, considérons tout d'abord le mouvement d'une particule chargée dans un paquet d'ondes longitudinales [1]. Il est décrit par le hamiltonien :

$$H(p,x,t) = \frac{p^2}{2m} + q \sum_{i \in \mathcal{J}} E_i \cos(k_i x - \omega_i t) \qquad (1.1.1)$$

où $\mathcal{J}$ désigne un sous-ensemble dénombrable de $\mathbb{N}$. Si $\mathcal{J}$ n'a qu'un seul élément ou que tous ses éléments ont même vitesse de phase, $\omega_i/k_i = Cte$, le système ne peut pas avoir de comportement chaotique. Dans

le premier cas, (1.1.1) se ramène au hamiltonien d'un pendule :

$$H\ (v,\ x) = \frac{v^2}{2} - M \cos x. \qquad (1.1.2)$$

dont on sait résoudre exactement [2,3] les équations du mouvement. Si $\mathcal{J}$ contient plus d'un élément, la particule peut alors diffuser en vitesse dans la zone chaotique de l'espace des phases. A cette condition un traitement statistique du mouvement et en particulier le calcul d'un coefficient de diffusion sont justifiés. La stochasticité intrinsèque est donc un ingrédient fondamental de l'étude de la turbulence plasma. Le cas où $\mathcal{J}$ ne contient que deux éléments de vitesses de phase différentes fait l'objet du paragraphe (1.2).

Le second exemple de la physique des plasmas où le chaos apparaît est le chauffage stochastique des particules par une onde longitudinale [4]. La réalisation de la fusion thermonucléaire nécessite la création d'un plasma de densité suffisante pendant un temps suffisamment long et à une température telle que les réactions de fusion puissent se produire. Dans les machines à confinement magnétique, le chauffage ohmique du plasma par le courant qui le parcourt ne suffit pas à le porter à la température nécessaire pour les réactions de fusion. Il faut donc des moyens de chauffage additionnels. Parmi ceux-ci, une méthode consiste à envoyer des ondes électromagnétiques de forte puissance dans le plasma. Ces dernières sont émises par des antennes à une fréquence appartenant à la gamme des fréquences cyclotroniques ou hybrides du plasma, telle que les ondes soient résonnantes avec un grand nombre de particules. Dans le plasma, ces ondes donnent, par conversion de mode, naissance à des ondes longitudinales dans lesquelles les particules peuvent avoir un comportement stochastique et acquérir ainsi de grandes énergies.

Pour décrire la trajectoire dans un plasma d'un paquet d'ondes satisfaisant la relation de dispersion locale $\omega = D\ (\bar{\rho}\ ,\ \bar{k})$ on peut utiliser une description en termes de rayons (à condition que les paramètres du plasma ne varient pas sur une distance de l'ordre de la longueur d'onde)[5].

Les rayons satisfont les équations :

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{k}}{dt} = -\dfrac{\partial\omega}{\partial\bar{\rho}} \\ \dfrac{d\bar{\rho}}{dt} = \dfrac{\partial\omega}{\partial\bar{k}} \end{cases}$$

Les équations sont identiques aux équations canoniques du hamiltonien D. Si ce dernier est non intégrable, la trajectoire du rayon peut être chaotique.

Le mouvement des particules chargées dans un champ magnétique dipolaire (ex. : ceintures de Van Allen) peut présenter un comportement chaotique. Quant le champ magnétique $\vec{B}$ est inhomogène mais que ses variations ne sont pas "trop rapides", on introduit, pour décrire le mouvement d'une particule chargée (charge q, masse m), un invariant dit "adiabatique" qui est le moment magnétique :

$$\mu = \frac{v_\perp^2}{2B}$$

où $v_\perp$ est la composante de la vitesse perpendiculaire à $\vec{B}$. La conservation parfaite de cet invariant conduirait au piégeage des particules dans les régions de champ magnétique minimum. La stochasticité intrinsèque du mouvement conduit à la destruction plus ou moins rapide de cet invariant. La possibilité de confiner les particules dans une région de champ magnétique minimum a entraîné la conception de machines ouvertes dites "miroirs". La stochasticité dans les miroirs magnétiques est étudiée au paragraphe 4.2.

En dernier, citons le cas de la destruction de surfaces magnétiques. Dans un tokamak, une ligne de champ magnétique engendre, au cours de sa révolution autour des axes primaires et secondaires du tore, une surface fermée dite "surface magnétique". Des perturbations de courant résultant de la destabilisation de certains modes plasmas : modes "kink"

internes [6] et modes "tearing" ou de déchirement [7], peuvent détruire les surfaces magnétiques.

2. ETUDE DU MOUVEMENT D'UNE PARTICULE CHARGEE DANS LE CHAMP DE DEUX ONDES LONGITUDINALES.

Le hamiltonien qui décrit un tel mouvement est :

$$H(p,z,\tau) = \frac{P_z^2}{2m} - q\,V_1 \cos(k_1 z - \omega_1 \tau) - q\,V_2 \cos(k_2 z - \omega_2 \tau) \qquad (1.2.1)$$

On montre dans l'appendice (I) qu'après une transformation canonique et un changement d'échelle adéquat, l'évolution de la particule est décrite par le hamiltonien :

$$H(v, x, t) = \frac{v^2}{2} - M \cos x - P \cos k\,(x - t) \qquad (1.2.2)$$

Le hamiltonien à 2 degrés de liberté indépendant du temps :

$$\mathcal{H}(v, w, x, y) = \frac{v^2}{2} + w - M \cos x - P \cos k\,(x - y) \qquad (1.2.3)$$

a les mêmes équations du mouvement que H.

Pour étudier numériquement l'évolution de (v, x) nous adoptons une représentation de Poincaré qui revient à définir dans l'espace des phases un plan dit "plan de section" et à considérer une suite (P_i) d'intersections successives de toute trajectoire avec ce plan pour un signe donné de la vitesse $\dot{y}$. Le système hamiltonien que l'on considère a deux degrés de liberté. L'espace des phases est de dimension 4 et la surface d'énergie H = Cte sur laquelle se trouve une trajectoire donnée est donc de dimension 3. Deux cas se présentent :

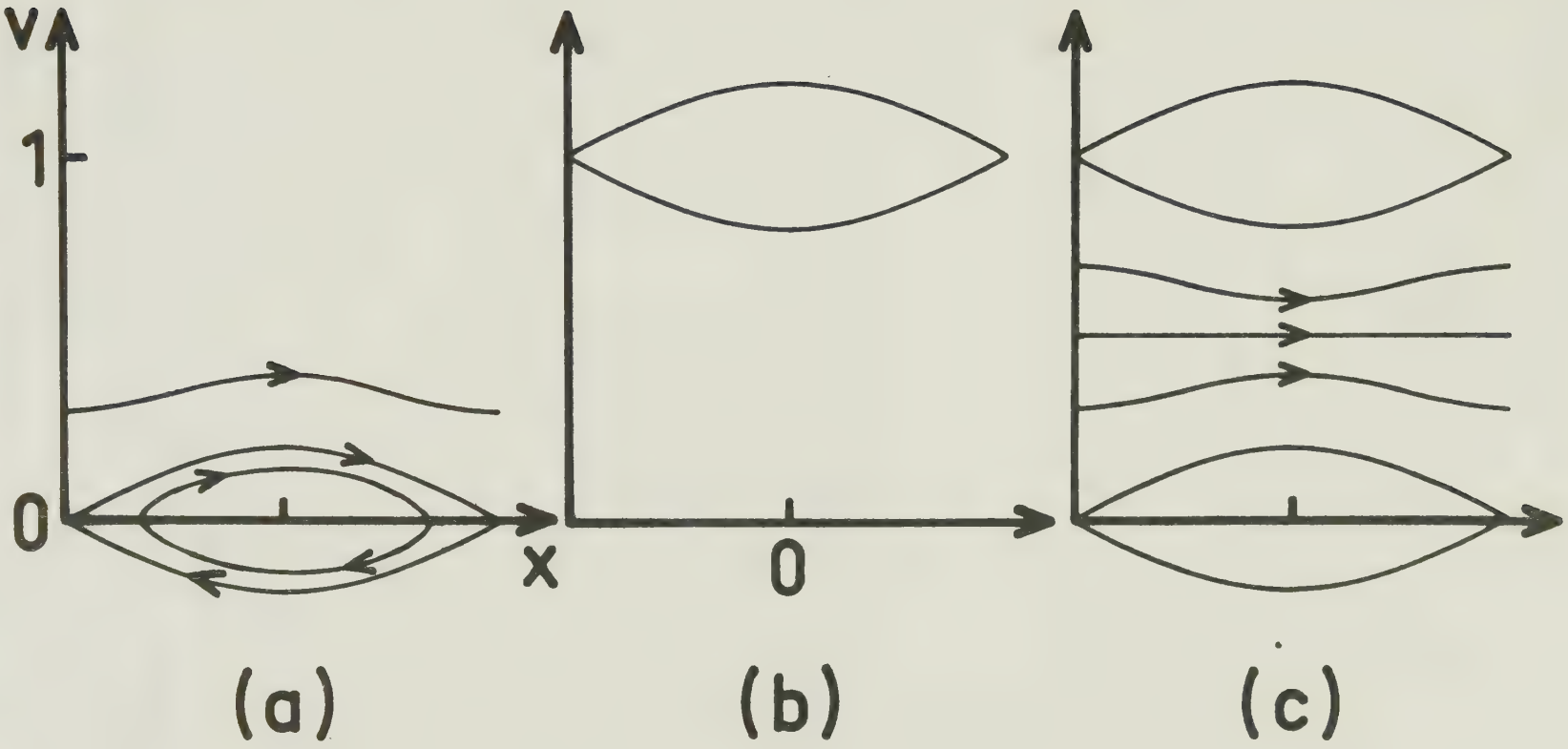


Fig. 1.1 : Représentation de l'espace des phases (k = 1). (a) La résonance M seule ; (b) La résonance P seule ; (c) Les deux résonances ensemble.

- ou bien il existe un invariant supplémentaire du mouvement (autre que l'énergie) et la trajectoire appartient donc à une surface de dimension 2 ("le tore invariant"). L'intersection de cette surface avec le plan de section est une courbe (de dimension 1) et les intersections successives de la trajectoire avec le plan s'ordonnent sur cette courbe.

- ou bien il n'existe pas d'autre invariant du mouvement que l'énergie et l'intersection de la surface d'énergie (de dimension 3) avec le plan de section est une portion de ce plan. Les intersections de la trajectoire avec ce plan ne sont plus ordonnées sur une courbe mais couvrent uniformément une aire finie du plan de section. Le plan de section choisi pour étudier H est :

$$y = kt \equiv 0 \quad (\text{mod. } 2\pi)$$

ce qui revient à échantillonner la trajectoire avec une période égale à $2\pi/k$ qui est la période temporelle du système. On supposera que $k = r/p$ (r et p entiers). $\mathcal{H}$ a une périodicité de $2p\pi$ en x et $2\pi/k$ en y et (x, y) appartient au tore $[0,2p\pi] \times [0,2\pi/k]$. Le fait que H et $\mathcal{H}$ décrivent le même système dynamique nous permet de parler de "tore" même quand on considère le hamiltonien H dépendant du temps.

Quand P = 0, on retrouve le hamiltonien du pendule, [2]. Dans ce cas, une zone de piégeage (où le mouvement est une libration autour du point fixe, x = v = 0) de largeur 2π en x et $4\sqrt{M}$ en v apparaît dans l'espace des phases (voir fig. 1a). Les orbites qui sont à l'intérieur de ce domaine sont dites piégées par la résonance M. En dehors de ce domaine, le mouvement est alors une rotation, et les trajectoires dans l'espace des phases sont topologiquement équivalentes aux droites correspondant à M = P = Quant M = 0, on retrouve ces zones de piégeage mais centrées en v = 1, $x = 0 \ (\text{mod } 2p\pi/r)$ de largeur $2p\pi/r$ en x et $4\sqrt{P}$ en v (fig. 1b).

Quant M et P sont tous deux différents de zéro mais petits, ces deux zones de piégeage correspondant respectivement à la "résonance M" (v = 0) et à la "résonance P" (v = 1), sont simultanément présentes avec une

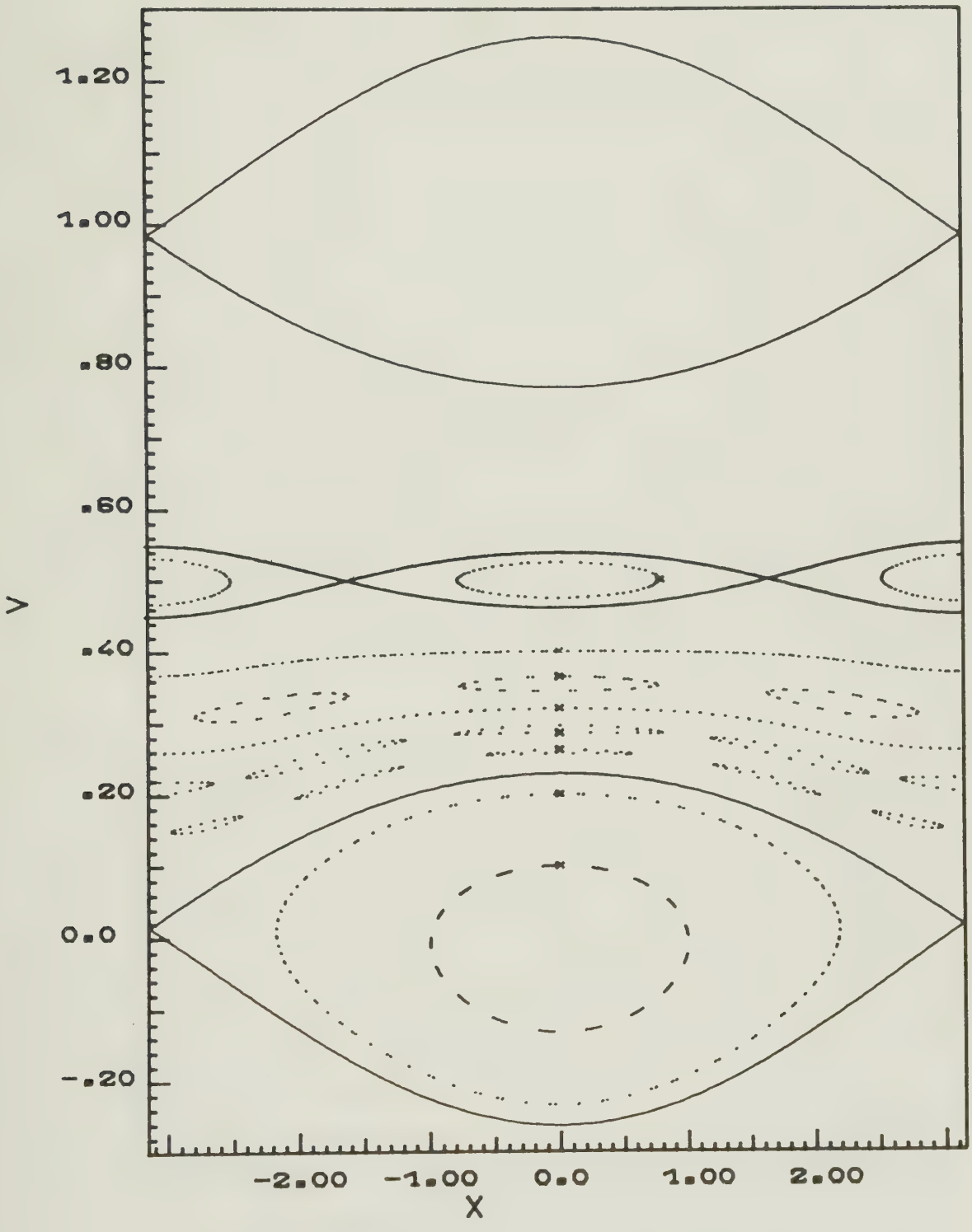


Fig. 1.2 : Représentation de Poincaré de quelques trajectoires dans l'espace (x, v) : k = 1, M = P = 1/64 (s = 0.5)

période spatiale commune égale à $2p\pi$. Nous considérons donc comme identiques deux points de vitesse v dont la position x ne diffère que d'un multiple de $2p\pi$ et définissons l'application de Poincaré dans l'intervalle $(-p\pi, +p\pi)$ en x. Etant donné que M et P sont petits, on peut s'attendre à ce que les trajectoires situées entre les deux résonances primaires soient faiblement déformées, mais restent topologiquement équivalentes (voir fig. 1c). L'espace des phases contient les deux domaines de piégeage initiaux non perturbés et entre eux apparaît un ensemble d'orbites légèrement perturbées. Définissant $s = 2\sqrt{M} + 2\sqrt{P}$ (somme des deux demi-largeurs des résonances M et P); l'image précédente de l'espace des phases reste valable tant que $s << 1$ (faible perturbation). Cette approche intuitive est en accord avec le théorème de Kolmogorov Arnold et Moser (K.A.M) [8, 9, 10, 11, 12] qui prédit que les trajectoires de vitesse moyenne irrationnelle appartiennent à une surface de dimension 2 dans l'espace des phases (v, w, x, y). Cette dernière est périodique en x et en y. On peut définir la position par deux angles x et y ; le mouvement a ainsi lieu sur un tore appelé : tore de KAM. Les courbes apparaissant sur les (fig. 1a et 2) et séparant les résonances M et P sont les traces des intersections des tores de KAM avec le plan $y = 0$.

La figure (1.2) montre aussi une chaîne de petits îlots entre les résonances M et P, qui dans la limite M, P tendant vers zéro, sont centrées autour des vitesses moyennes k/k+n (n entier). Au cours du mouvement, la trajectoire explore chacun de ces îlots d'une même chaîne successivement. Ces îlots correspondant à des résonances R_n, ont la forme d'une chaîne de zones "elliptiques" qui entourent les points fixes elliptiques pour une itérée de l'application de Poincaré. Les points qui séparent deux zones elliptiques sont dits points fixes hyperboliques. L'apparition de ces résonances pour des vitesses rationnelles est en accord avec le théorème de Poincaré-Birkhoff [2, 11, 13] qui prédit que l'infinité des trajectoires périodiques du système non perturbé donne naissance à un nombre fini pair de trajectoires périodiques pour le système perturbé. Parmi ces 2n trajectoires périodiques, n correspondent aux points fixes stables (elliptiques) et n autres aux points fixes instables (hyperboliques).

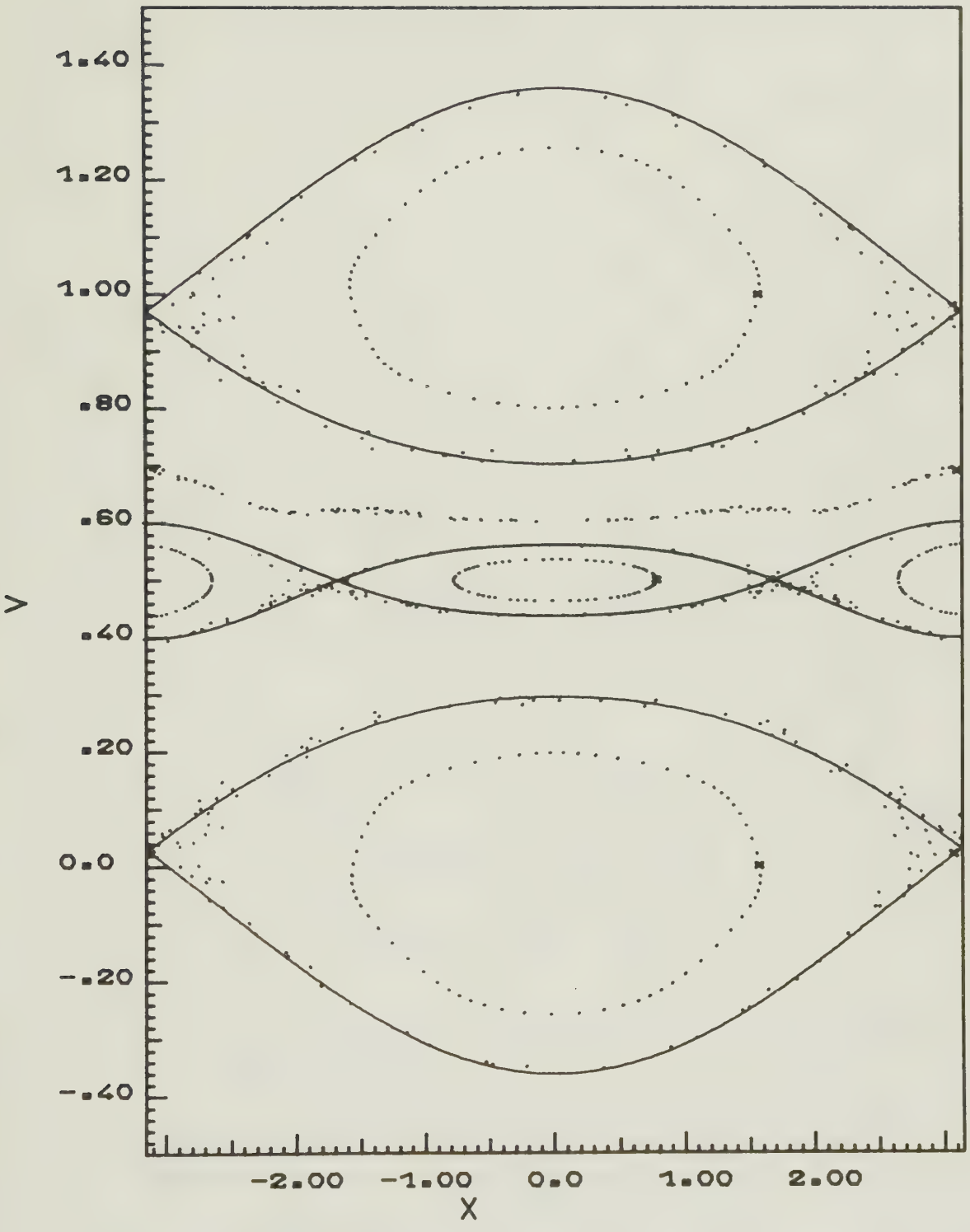


Fig. 1.3 : Représentation de Poincaré de quelques trajectoires dans l'espace des phases (x, v) : k = 1, M = P =0.0289 (s = .68).

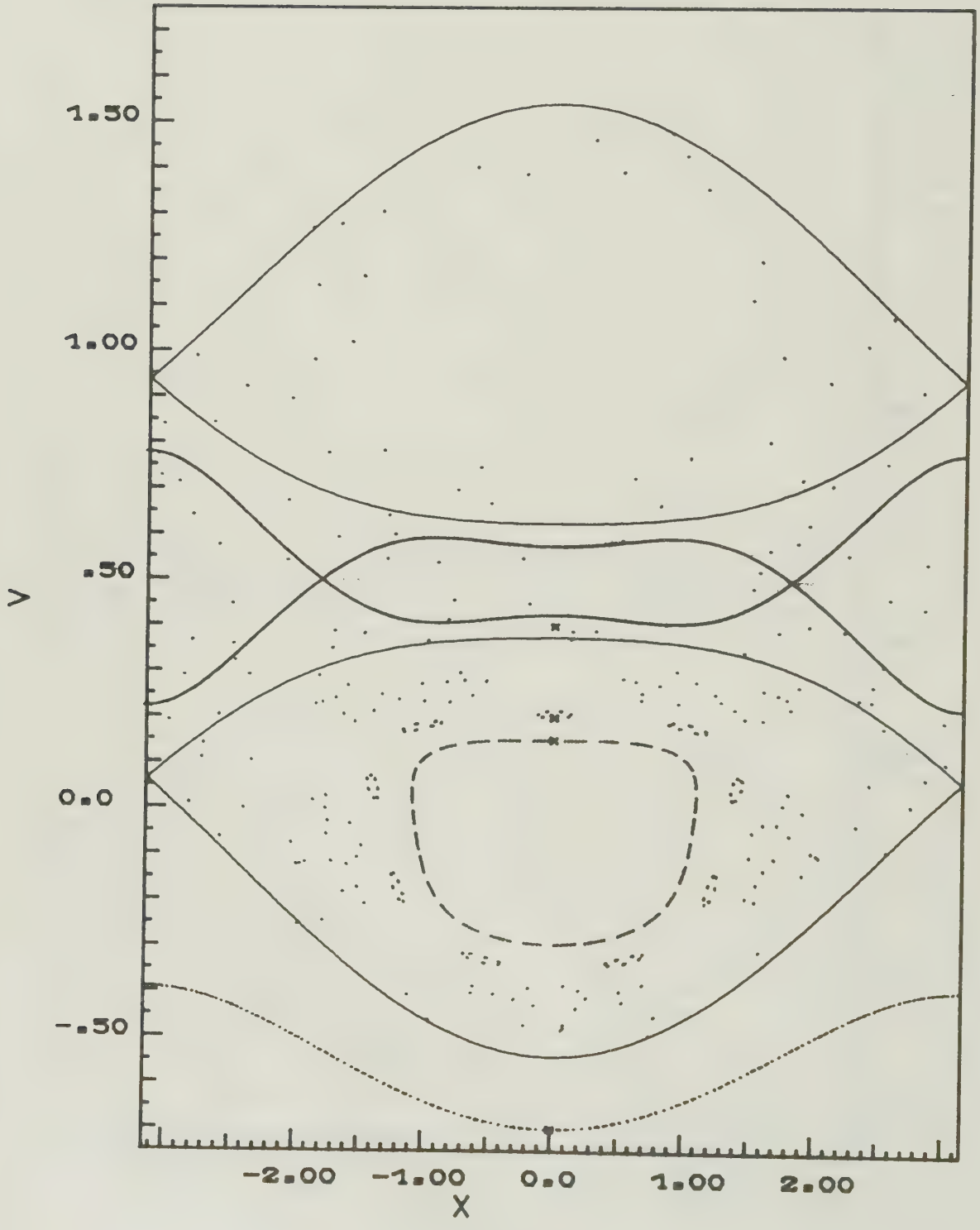


Fig. 1.4 : Représentation de Poincaré de quelques trajectoires dans l'espace des phases (x, v) : k = 1, M = P = 1/16 (s = 1).

Notons que la structure de l'espace des phases est bien plus compliquée qu'elle ne le paraît sur la figure (1.2) et qu'en particulier si l'on considère deux résonances voisines R_n et R_{n+1}, l'espace entre ces deux résonances présente la même structure que l'espace global entre les résonances primaires M et P. Il est constitué d'une infinité de tels systèmes emboîtés.

Quand s augmente (voir fig. 1.3), les tores invariants subissent des déformations de plus en plus importantes mais agissent encore comme barrière à la diffusion dans l'espace des phases. Les séparatrices n'existent plus et sont remplacées par des couches stochastiques de plus en plus épaisses. Quand s devient de l'ordre de 1, (voir fig. 1.4) les tores invariants sont détruits peu à peu et une trajectoire peut diffuser dans l'espace des phases alors qu'auparavant son excursion en vitesse était bornée entre deux barrières. Il y a donc recouvrement des couches stochastiques. Le système est alors chaotique, il y a divergence exponentielle des trajectoires initialement voisines [11]. La transition à la stochasticité de grande échelle correspond à la destruction de la dernière barrière à la diffusion (dernier tore de K.A.M.) entre les résonances M et P.

3. VARIETES STABLES ET INSTABLES.

Soit T_R une transformation de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui à (M, P, k) associe (M', P', k'). Les points fixes de T_R sont définis par l'équation :

$$T_R(M, P, k) = (M, P, k) = (M^*, P^*, k^*).$$

Si on linéarise T_R au voisinage du point fixé $F = (M^*, P^*, k^*)$, on définit le flot tangent de T_R par :

$$\delta T_R\ (M, P, k) = \begin{pmatrix} \delta M' \\ \delta P' \\ \delta k' \end{pmatrix} = \overline{\overline{\mathcal{L}}} \begin{pmatrix} \delta M \\ \delta P \\ \delta k \end{pmatrix}$$

Les coefficients de $\bar{\bar{\mathcal{L}}}$ sont calculés pour les valeurs (M*, P*, k*) du point fixe F.

Les valeurs propres réelles de $\bar{\bar{\mathcal{L}}}$ sont : λ et λ' avec $\lambda' < 1$ (valeur propre contractante) et $\lambda > 1$ (valeur propre dilatante). Il existe deux variétés (l'une stable, l'autre instable) transformées en elles-mêmes par T_R, passant par le point fixe F, tangentes en ce point aux directions propres de l'application tangente δT_R et composées de points $z = (M, P, k)$ tel que :

$$T_R^n (z) \to F \text{ (resp. } T_R^{-n} (z) \to F) \quad \text{quand} \quad n \to \infty$$

pour la variété stable (resp. instable). Ces variétés sont des courbes dans le cas de l'application de Poincaré effectuée sur le hamiltonien (1.2.2). Ce sont ces courbes qui constituent les séparatrices observées et rigoureusement calculées dans le cas du pendule [3], avec la particularité que, pour ce système intégrable, les variétés stable et instable du point fixe hyperbolique ($x = \pi$, $v = 0$) (fig. 1.1.a) se confondent. Dans le cas non intégrable, il y a levée de dégénérescence et c'est la source du chaos.

Un point où les variétés stable et instable d'un point fixe hyperbolique se coupent transversalement est dit homoclinique. On montre que l'existence d'un tel point entraîne automatiquement l'existence d'une infinité d'autres [11]. On conçoit la difficulté que représente la prévision à long terme au voisinage des points fixes hyperboliques. Une erreur arbitrairement petite peut, dans ces régions, déplacer sur la variété instable une orbite qui initialement se trouvait sur la variété stable ; l'orbite est alors différente de ce quelle aurait été en l'absence de toute erreur (de là apparaît l'origine de la divergence exponentielle des trajectoires). Ces zones correspondront donc aux zones chaotiques de l'espace des phases (voir fig. 1.4).

CHAPITRE II.

APPROXIMATION "DE RESONANCE CENTREE"

La méthode originalement proposée par ESCANDE et DOVEIL [14, 15, 16, 17] pour appliquer leur groupe de renormalisation au calcul de seuil de stochasticité grande échelle pour un hamiltonien général est testée ici sur des hamiltoniens comportant des résonances dont l'amplitude a une dépendance linéaire ou quadratique par rapport à la vitesse.

Soit α (resp β) le paramètre du terme linéaire (resp quadratique) par rapport à la vitesse de ces amplitudes. Nous constatons que cette méthode prévoit une décroissance du seuil de stochasticité grande échelle de ces hamiltoniens avec α (resp β). L'approche de WALKER et FORD [18] basée sur l'idée de recouvrement de résonances conduit aussi à une décroissance du seuil.

A notre surprise, les calculs numériques des trajectoires réalisées sur ces hamiltoniens, révèlent une dépendance du seuil par rapport aux paramètres α et β toute autre que celle prévue par les deux approches théoriques précédentes !

Un "paradoxe" semble donc exister. Le but que nous nous fixons dans ce qui suivra sera d'expliquer ce "paradoxe" et de reformuler ainsi la théorie de groupe de renormalisation d'Escande et Doveil appelée E.D. par la suite.

Cette théorie aura l'avantage de traiter analytiquement les propriétés universelles et non universelles (calcul de seuils de stochasticité grande echelle SGE) liées à la transition du chaos dans des systèmes hamiltoniens.

1. NAISSANCE D'UN PARADOXE.

Soit l'hamiltonien :

$$H_\alpha(v,x,t) = \frac{1}{2} v^2 - M_o\big(1+\alpha v\big)\cos x - M_o\big(1+\alpha(1-v)\big)\cos(x-t) \qquad (2.1.1.)$$

Cet hamiltonien a été choisi parce qu'il correspond pour $\alpha = 0$ au cas central de la théorie et qu'il existe une symétrie haut-bas dans l'espace des phases par rapport à la droite $v = \frac{1}{2}$. Nous suivrons la méthode décrite par E.D. concernant le calcul de seuil de stochasticité grande échelle d'un système hamiltonien à deux degrés de liberté. Cette méthode prédit des seuils pour l'hamiltonien paradigme :

$$H_p = \frac{1}{2} v^2 - M \cos x - P \cos k(x-t) \qquad (2.1.2.)$$

qui sont en bon accord avec les calculs numériques.

Pour étudier un hamiltonien général on aimerait donc se ramener à la forme (2.1.2.). Quand on s'intéresse à la stabilité d'un tore précis* τ_n^λ de vitesse moyenne u_n^λ, l'idée la plus simple serait de remplacer dans (2.1.1.) les vitesses intervenant dans les amplitudes par la vitesse moyenne sur le tore τ_n^λ. Quand les amplitudes des résonances sont petites, cette approximation est naturelle. De plus, pour la version approchée du groupe de renormalisation E.D., cette approximation dite de trajectoire faiblement perturbée (A.T.F.P.) a donné des résultats corrects pour le calcul de seuil de S.G.E. pour l'hamiltonien H_p donné par (2.1.2.). Ayant fait l'A.T.F.P. sur (2.1.1.), on obtient pour un tore τ_n^λ de vitesse moyenne u_n^λ :

$$H'_\alpha(v,x,t) = \frac{1}{2} v^2 - M_o\big(1+\alpha\, u_n^\lambda\big)\cos x - M_o\big(1+\alpha(1-u_n^\lambda)\big)\cos(x-t) \qquad (2.1.3.)$$

Soit
$$\begin{cases} \mathcal{M}_n^\lambda(\alpha) = M_o(1 + \alpha\, u_n^\lambda) \\ \mathcal{P}_n^\lambda(\alpha) = M_o\big(1 + \alpha(1-u_n^\lambda)\big) \end{cases} \qquad (2.1.4.)$$

* tore universel de E.D.

(2.1.3.) s'écrit alors :

$$H'_\alpha(v,x,t) = \frac{1}{2} v^2 - \mathcal{M}^{\lambda}_{n}(\alpha) \cos x - \mathcal{P}^{\lambda}_{n}(\alpha) \cos(x-t) \qquad (2.1.5.)$$

$H'_\alpha(v,x,t)$ a ainsi la structure de l'hamiltonien paradigme avec $k = 1$. Pour $\alpha = 0$, on constate que $r^{\lambda}_{n}(\alpha) = \dfrac{\mathcal{M}^{\lambda}_{n}(\alpha)}{\mathcal{P}^{\lambda}_{n}(\alpha)} = 1$.

La vitesse moyenne sur le tore τ^{λ}_{n} est définie par

$$u^{\lambda}_{n} = \frac{k}{\varrho^{\lambda}_{n}} \qquad (2.1.6.)$$

où ϱ est le nombre d'onde (appelé parfois nombre de rotation) [15]

$$\varrho^{\lambda}_{n} = k + n + \delta k^{\lambda}_{n} \qquad (a)$$

$$\delta k^{\lambda}_{n} = \frac{1}{2}\left\{ \left(n^2 + (4-2\lambda')n + 5\lambda' \right)^{1/2} - n - \lambda' \right\} \qquad (b) \qquad (2.1.7.)$$

$\lambda' = 1 - \lambda$ avec $\left(\lambda = 0 (n \geqslant 0) \quad \text{ou} \quad \lambda = 1 (n \geqslant 1)\right)$.

A partir de (2.1.4.), (2.1.6.) et (2.1.7.) avec $k = 1$, on obtient :

$$\mathcal{P}^{\lambda}_{n}(\alpha) = \mathcal{M}^{\lambda}_{n} \left[\frac{1 + (1+\alpha)(\delta k^{\lambda}_{n} + n)}{1 + \alpha + n + \delta k^{\lambda}_{n}} \right] \qquad (2.1.8.)$$

$$\text{d'où} \quad \mathcal{M}^{\lambda}_{n}(\alpha) = \frac{1 + \alpha + n + \delta k^{\lambda}_{n}}{1 + (1+\alpha)(\delta k^{\lambda}_{n} + n)} \qquad (2.1.9.)$$

La théorie E.D. montre qu'à chaque tore τ^{λ}_{n} correspond une surface $\mathcal{F}^{\lambda}_{n}$ dans l'espace (M, P, k), qui donne le seuil de destruction du tore. Les surfaces $\mathcal{F}^{\lambda}_{n}$ ont été calculées

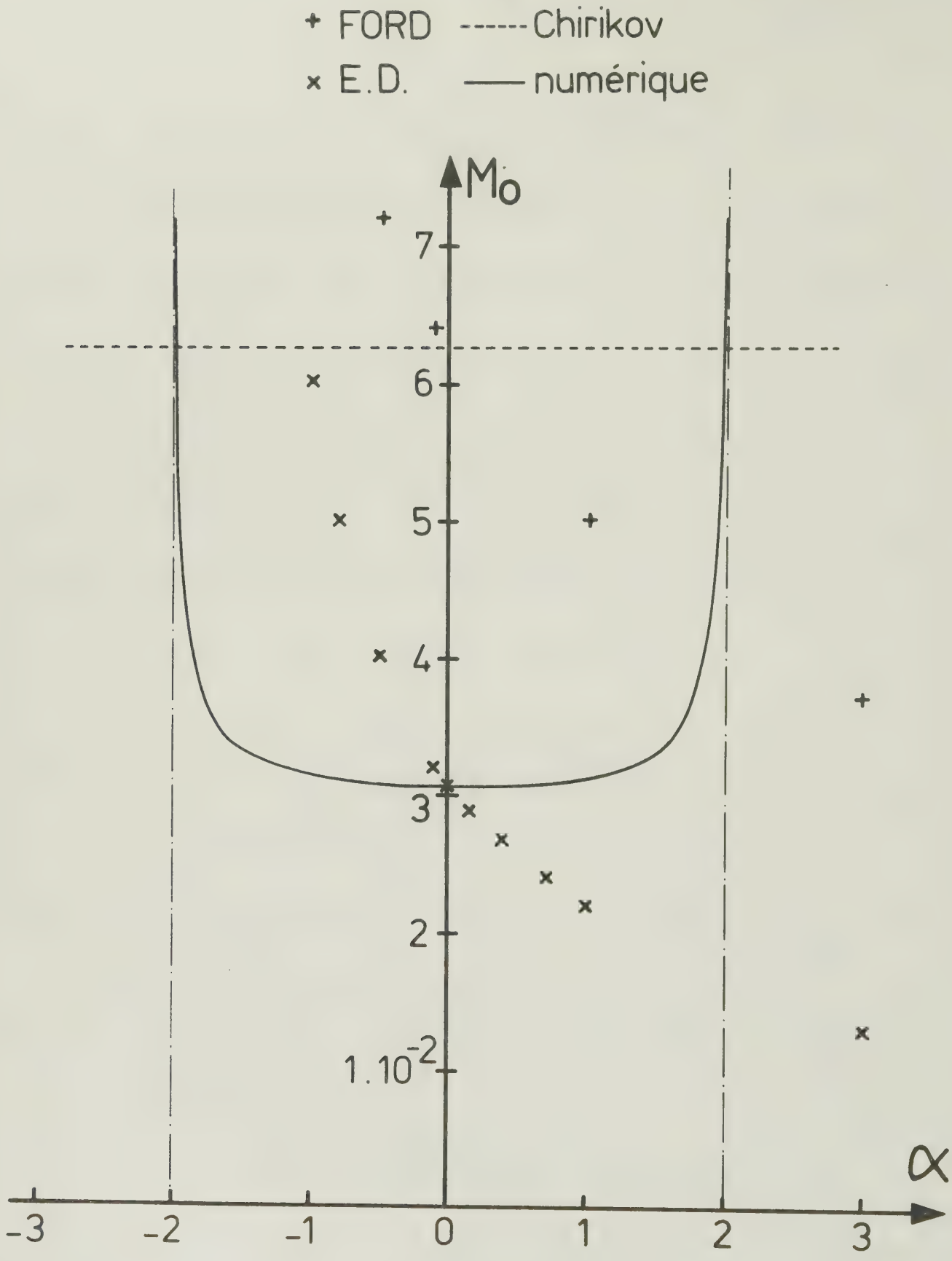


Fig. 2.1 : Seuil de stochasticité $M_o(d)$ du hamiltonien :

$$H(v,x,t) = \frac{1}{2} v^2 - M_o(1 + \alpha v) \cos x - M_o[1 + \alpha(1-v)] \cos (x - t).$$

numériquement pour le hamiltonien paradigme (cf. 2.1.1.).

Le seuil de destabilisation du tore τ_n^λ est donné par :

$$\xi_n^\lambda(\alpha) = M_{X_n^\lambda}(\alpha) + P_{X_n^\lambda}(\alpha) \qquad (2.1.10.)$$

où $X_n^\lambda = (M_{X_n^\lambda}, P_{X_n^\lambda})$ est le point d'intersection dans le plan (M,P) de $\mathcal{J}_n^\lambda$ avec la droite $P = M/r_n^\lambda(\alpha)$. Cette dernière valeur peut donc être déterminée numériquement et correspond pour chaque tore à la valeur du seuil de déstabilisation. A chaque tore τ_n^λ est associé une valeur de M_o qui donne le seuil de destruction du tore. En utilisant (2.1.4.) et (2.1.10.), on obtient :

$$M_o = \frac{\xi_n^\lambda}{2+\alpha} \qquad (2.1.11.)$$

On détermine M_o pour chaque couple (n,λ). La valeur de M_o correspondant au seuil de stochasticité grande échelle est donnée par (2.1.11.) avec $n = \lambda = 1$. Si on porte cette valeur en fonction de α on obtient la courbe (E.D.) de la (fig. 2.1.). Pour $\alpha = 0$, on retouve $M_o \simeq 1/32$ seuil obtenu par E.D. pour H_p donné par (2.1.2.) [14] pour $r = 1$ et $k = 1$. La décroissance du seuil par rapport à α correspond à la décroissance de M(v) et P(v) entre les deux résonances primaires pour des α positifs, ce qui suggère intuitivement que le système est moins stochastique. La valeur prévue par CHIRIKOV [19] par son critère de recouvrement des résonances est $M_o \simeq 1/16$ pour toute valeur de α.

Nous avons aussi appliqué la méthode introduite par WALKER et FORD [18] et reprise par WISDOM [20] au hamiltonien (2.1.1.) pour déterminer la valeur de M_o correspondant au seuil de stochasticité grande échelle. Cette approche consiste à

calculer les séparatrices exactes des résonances non perturbées et à leur appliquer le critère de recouvrement des résonances de CHIRIKOV [19]. Il suffit de calculer la largeur de l'une des deux résonances du système décrit par (2.1.1.) car par suite de la symétrie, leurs largeurs sont égales. Soit l'hamiltonien :

$$h_\alpha(v,x) = \frac{1}{2} v^2 - M_o(1 + \alpha v) \cos x \qquad (2.1.12.)$$

qui n'est rien d'autre que (2.1.1.) réduit à une résonance. Les équations du mouvement écrites à partir de (2.1.12.) sont :

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial v} = v - M_o\, \alpha \cos x & (a) \\ \dot{v} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = - M_o(1 + \alpha v) \sin x & (b) \end{cases} \qquad (2.1.13.)$$

Le principe de conservation de l'énergie sur la séparatrice nous donne :

$$h_\alpha(v_o, 0) = h_\alpha(v_\pi, \pi) \qquad (2.1.14.)$$

En $x = \pi$, on a un point fixe instable pour lequel :

$$\text{et} \quad \begin{matrix} \dot{x}_\pi = 0 \\ \dot{v}_\pi = 0 \end{matrix}$$

de (2.1.13.a) on obtient :

$$v_\pi = - M_o \alpha \qquad (2.1.15.)$$

Portant cette valeur dans (2.1.14.) il vient :

$$\frac{1}{2} v_o^2 - M_o(1 + \alpha v_o) = \frac{1}{2} (M_o \alpha)^2 + M_o\,(1 - \alpha^2 M_o) \qquad (2.1.16.)$$

La largeur de résonance est alors :

$$\Delta v = v_o = 2\sqrt{M_o} + M_o \alpha$$

D'après Walker et Ford, le seuil de S.G.E. est :

$$s_{FORD} = 2 \Delta v = 1 \qquad (2.1.17.)$$

Combinant (2.1.17.) et (2.1.16.), on obtient :

$$M_o = \frac{\alpha + 4 - 2\sqrt{2\alpha+4}}{2 + \alpha^2} \qquad (2.1.18.)$$

On remarque que :

$$\lim_{\alpha \to o} M_o = \lim M_o \frac{\alpha + 4 - 2\sqrt{2\alpha+4}}{2 + \alpha^2} = \frac{1}{16} = M_{o(CHIRIKOV)} \qquad (2.1.19.)$$

La figure (2.1.) montre les variations de M_o en fonction du paramètre α telles que les théories E.D. (1.2.3.) ; CHIRIKOV [19] et WALKER et FORD [18] les donnent. Une comparaison avec les seuils numériques obtenus par intégration directe des trajectoires du mouvement y figure aussi. Ce que l'on constate numériquement est très surprenant car pour $-1 \leqslant \alpha \leqslant +1$, la valeur de M_o est stationnaire $M_o(\alpha) \simeq M_o(\alpha=0)$ et pour $\alpha \pm 2$ on a $\lim_{\alpha \to \pm 2} M_o = +\infty$.

Déjà on s'attendait pour $\alpha = -2$ à ce que la méthode E.D. ne donne pas la bonne estimation du seuil. En effet, pour cette valeur de α les amplitudes des résonances s'annulent au centre du système. Du côté $\alpha > 0$, on ne savait pas à priori jusqu'où l'A.T.F.P. serait valable. Mais pour un certain intervalle du paramètre α, on s'attendait à obtenir une décroissance du seuil. Or les résultats théoriques fournis par la méthode E.D., celle de WALKER et FORD et CHIRIKOV sont incohérents avec les caluls mumériques. Un paradoxe est né !. Dans le paragraphe suivant nous l'expliquons au moyen de deux approches et nous verrons qu'il nous suggère de remplacer partiellement l'A.T.F.P. par une approximation que nous appellerons "Approximation de Résonance Centrée" (A.R.C.).

2. RESOLUTION DU PARADOXE.

Deux approches expliquent le comportement en "plateau du seuil pour $-1 \leqslant \alpha \leqslant +1$ ainsi que les valeurs infinies qu'il peut prendre pour $\alpha = \pm 2$. Une des approches utilise les équations canoniques du mouvement, l'autre utilise une transformation canonique dite de KOLMOGOROV [19] qui supprime les résonances du système à l'ordre le plus bas en M et P.

a. Première méthode.

Les équations du mouvement du hamiltonien $H_\alpha(v,x,t)$ donné par (2.1.1.) s'écrivent :

$$\dot{x} = v - \alpha M_o\big(\cos x - \cos(x-t)\big) \qquad \text{(a)}$$

$$\dot{v} = -M_o(1+\alpha v)\sin x - M_o\big(1+\alpha(1-v)\big)\sin(x-t) \qquad \text{(b)} \qquad (2.2.1.)$$

De l'équation (2.2.1.a.) on obtient après une dérivation temporelle :

$$\dot{v} = \ddot{x} + \alpha M_o\big(-\dot{x}\sin x + (\dot{x}-1)\sin(x-t)\big) \qquad (2.2.2.)$$

Combinant les équations (2.2.1.a.), (2.2.1.b.) et (2.2.2.) on a :

$$\ddot{x} + M_o\big(\sin x + \sin(x-t)\big) + \alpha^2 M_o^{\,2}\big(\sin x - \sin(x-t)\big)\big(\cos x - \cos(x-t)\big) = 0 \qquad (2.2.3.)$$

Cette équation révèle ce fait non intuitif que l'évolution de x ne dépend que de M_o et α^2. Ceci va expliquer la symétrie de la courbe $M_o(\alpha)$ numérique (fig. 2.1.). Une conséquence importante découle de cette symétrie.

De l'équation (2.2.1.a.) on déduit :

$$\dot{x}(t=0) = v(t=0) \qquad \text{quel que soit la valeur de } \alpha.$$

Notons $v(t=0) = v_o$ et $x(t=0) = x_o$ d'où $\dot{x}_o = v_o$ (2.2.4.)

Avec les conditions initiales (2.2.4.) il apparait que la solution $x_\alpha(t)$ de l'équation (2.2.3.) est la même pour α et $-\alpha$

$$x_\alpha(t) = x_{-\alpha}(t) = x_{|\alpha|}(t) \tag{2.2.5.}$$

Soit $f(x,t) = \cos x - \cos(x-t)$.
L'équation (2.2.1.a.) nous donne :

$$\left.\begin{aligned} v_\alpha(t) &= \dot{x}_{|\alpha|} + \alpha M_o f(x,t) \qquad (a) \\ \text{et} \qquad & \\ v_{-\alpha}(t) &= \dot{x}_{|\alpha|} - \alpha M_o f(x,t) \qquad (b) \end{aligned}\right\} \tag{2.2.6.}$$

d'où :

$$v_\alpha(t) - v_{-\alpha}(t) = 2 \alpha M_o f(x,t) \tag{2.2.7.}$$

De là, on en déduit que, si pour un couple $(-\alpha, M_o)$ il existe un tore invariant associé à la solution $v_{-\alpha}(x,t)$, alors il existe aussi pour le couple (α, M_o) un tore invariant de vitesse $v_\alpha(x,t) = v_{-\alpha}(x,t) + 2 \alpha M_o f(x,t)$ et réciproquement. Vu qu'à $t = 0$, $f(x,0) = 0$, on a alors $v_\alpha(x,0) = v_{-\alpha}(x,0)$: la représentation de Poincaré est la même pour α et $-\alpha$. Nous l'avons constaté numériquement pour le tore de vitesse $v = \frac{1}{2}$ à $t = 0$; les représentations de Poincaré relatives aux cas $\alpha = 2$ et $\alpha = -2$ sont identiques. Pour des temps différents de zéro, ces représentations sont différentes. Une distorsion apparait entre elles.

La symétrie en α apparaissant dans l'équation (2.2.3. explique que le seuil numérique $M_o(\alpha)$ a l'allure donnée par la fig. (2.1.). Le fait qu'en $\alpha = -2$ et $\alpha = +2$ il existe des barrières à la S.G.E. vient du fait que pour $\alpha = -2$ la courbe $v = \frac{1}{2}$ est solution quelque soit x de (2.2.1.b.). L'équation (2.2.1.a.) s'écrit alors :

$$\dot{x} = \frac{1}{2} + 2 M_o f(x,t) \qquad (2.2.8.)$$

Cette équation différentielle ordinaire du premier ordre admet une solution x(t) avec $x(t=0) = x_o$. Des conditions initiales (2.2.4.) on déduit :

$$\begin{cases} x(0) = x_o \\ \dot{x}(0) = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad (2.2.9.)$$

x(t) est aussi solution de (2.2.3.) avec $\alpha = -2$ et les conditions initiales (2.2.9.). Pour $\alpha = +2$, appliquant (2.2.6.), on obtient :

$$v_2(t) = \frac{1}{2} + 4 M_o f(x,t) \qquad (2.2.10.)$$

Les trajectoires correspondant aux conditions initiales (2.2.9.) appartiennent au tore $v_2(t)$ donné par (2.2.10.). Ce tore constituera donc une barrière à la diffusion dans l'espace des phases. Cette dernière empêche la stochasticité grande échelle pour $\alpha = \pm 2$.

L'exploration numérique de l'espace des phases du hamiltonien (2.1.1.) avec $\alpha = \pm 2$ montre la section de Poincaré du système avec deux demi-domaines stochastiques séparés d'une barrière à $v = \frac{1}{2}$, il n'y a aucune diffusion haut-bas entre ces deux régions de l'espace des phases. Nous avons vu au moyen de cette première méthode, en utilisant les équations canoniques, que l'évolution du système hamiltonien décrit par

(2.1.1.) présente une symétrie en α. Quoique cette méthode ait un aspect élégant, elle s'avère très compliquée pour des hamiltoniens plus généraux. Pour cette raison, nous allons introduire une seconde méthode dont l'avantage est de traiter les hamiltoniens linéaires et non linéaires sans avoir recours à des calculs trop fastidieux.

b. Deuxième méthode.

Le principe de cette approche est d'opérer une transformation canonique dite de "Kolmogorov" qui supprime toutes les résonances d'ordre le plus bas du hamiltonien (2.1.1.) et exhibe les propriétés de symétrie en α que comporte le mouvement. Pour décrire l'influence des 2 résonances du hamiltonien (2.1.1.) sur un tore, on définit de nouvelles variables (I,Θ) par la transformation de Kolmogorov dont la fonction génératrice est donnée par :

$$F_\alpha(I,x,t) = Ix + \frac{M_o(1+\alpha I)}{I} \sin x + \frac{M_o\left(1+\alpha(1-I)\right)}{I-1} \sin(x-t) \qquad (2.2.11.)$$

Cela définit de nouvelles variables conjuguées I et Θ reliées aux variables v et x par :

$$\begin{cases} v = \dfrac{\partial F_\alpha}{\partial x} = I + \dfrac{M_o(1+\alpha I)}{I} \cos x + \dfrac{M_o\left(1+\alpha(1-I)\right)}{I-1} \cos(x-t) \\ \Theta = \dfrac{\partial F_\alpha}{\partial I} = x - \dfrac{M_o \sin x}{I^2} - \dfrac{M_o \sin(x-t)}{(I-1)^2} \end{cases} \qquad (2.2.12.)$$

dans lesquelles le hamiltonien (2.1.1.) s'écrit :

$$H^{(1)}_{KOL}(I,\Theta,t) = \frac{I^2}{2} + M_o{}^2\left(\frac{1}{2I^2} - \frac{\alpha^2}{2}\right)\cos^2 x(I,\Theta) +$$

$$M_o{}^2\left(\frac{1}{2J^2} - \frac{\alpha^2}{2}\right)\cos^2\left[x(I,\Theta) - t\right] +$$

$$M_o{}^2\left(\frac{1}{IJ} + \alpha^2\right)\cos x(I,\Theta)\cos\left[x(I,\Theta) - t\right]$$

(2.2.13.)

avec $J = I - 1$. On constate que le mouvement décrit par le hamiltonien (2.2.13.) présente une symétrie en α dans son expression. De plus, pour $I = \frac{1}{2}$ et $\alpha = \pm 2$, le hamiltonien (2.2.13.) est intégrable car $H^1_{kol}\left(I = \frac{1}{2}, \Theta, t\right) = \frac{I^2}{2} = \frac{1}{8}$. $I = \frac{1}{2}$ est une courbe invariante dans l'espace des phases (I,Θ) ; donc une barrière à la stochasticité de grande échelle. Cela explique à nouveau pourquoi pour $\alpha = \pm 2$, les seuils de stochasticité grande échelle observés numériquement sont infinis. Le mouvement dans les coordonnées (I,Θ) ne dépend que de α^2 mais il dépend de α par les relations (2.2.12) dans les coordonnées (v,x).

Pour lever l'ambiguïté provenant du désaccord entre la méthode E.D. et les calculs numériques, nous allons supprimer partiellement l'A.T.F.P. et introduire à sa place l'approximation dite de résonance centrée suggérée par les considérations précédentes.

3. APPROXIMATION DE "RESONANCE CENTREE".

Le fait que le hamiltonien (2.1.1.) ne dépende que de α^2 (ce qui correspond à un seuil numérique en "plateau" pour $-1 \leqslant \alpha \leqslant +1$) nous incite à prendre comme hamiltonien approché décrivant le mouvement, celui dans lequel les résonances ont des amplitudes constantes calculées au centre de celles-ci

c'est-à-dire $M_o(\alpha) \approx M_o(0)$. Cette approximation sera appelée : "Approximation de Résonance Centrée" avec A.R.C. comme abréviation.

Pour être sûr de l'A.R.C., nous avons aussi exploré numériquement le hamiltonien non linéaire dont les résonances ont des amplitudes à dépendance quadratique de la vitesse ; le même phénomène de "plateau" pour le seuil s'observe.

Cela nous conduit donc à rejeter partiellement l'approximation de trajectoire faiblement perturbée de la formulation E.D. qui consiste à calculer les amplitudes des résonances pour la vitesse non perturbée du tore considéré et qui prévoit un seuil théorique décroissant avec la valeur de α pour le hamiltonien (2.1.1.) comme le montre la figure (2.1.)

C'est ainsi que germe l'idée de reformuler le groupe de renormalisation avec l'A.R.C. Cette version va s'avérer mieux décrire analytiquement les propriétés universelles et non universelles (calcul de S.G.E.) de la transition au chaos dans les systèmes hamiltoniens à deux degrés de liberté que la formulation E.D.

4. ETUDE DU HAMILTONIEN A TERMES LINEAIRES ET QUADRATIQUE EN VITESSE.

Dans le paragraphe précédent (2.3.), nous avons vu la nécessité d'introduire l'A.R.C. pour expliquer le comportement du seuil de S.G.E. L'utilisation d'un hamiltonien dont les amplitudes des résonances primaires sont des fonctions linéaires et quadratiques de la vitesse, nous permettra d'illustrer dans un cas plus général l'A.R.C. et de définir le domaine dans lequel cette approximation est sûrement valable pour un tel hamiltonien.

Soit le hamiltonien :

$$H(v,x,t) = \frac{1}{2}v^2 - M_o\left(1+\alpha v+\beta v^2\right)\cos x$$

$$- P_o\left(1+\alpha'(1-v)+\beta'(1-v)^2\right)\cos k(x-t) \qquad (2.4.1.)$$

où α, α', β et β' sont des paramètres réels. Le cas où $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta' = 0$, $M_o = P_o$ et $k = 1$ se ramène au hamiltonien (2.1.1.) dont une étude exhaustive a été fournie dans les paragraphes (2.1.) et (2.2.).

Nous avons numériquement exploré le cas où $\alpha = \alpha' = 0$ $\beta = \beta'$, $M_o = P_o$ et $k = 1$ donné par le hamiltonien :

$$H(v,x,t) = \frac{1}{2}v^2 - M_o(1+\beta v^2)\cos x - M_o\left(1+\beta(1-v)^2\right)\cos(x-t) \qquad (2.4.2.)$$

La figure (2.2.) présente les calculs numériques de seuil effectués sur le hamiltonien (2.4.2.). Nous remarquerons qu'une fois encore le phénomène de "plateau" est présent. Pour $\beta \to -4$, $\lim M_o = +\infty$: il n'y a donc pas de S.G.E. quand $\beta \to -4$. Enfin pour $\beta = +\frac{4}{3}$, le seuil est fini mais à valeur élevée.

Ce comportement du seuil observé numériquement peut être expliqué au moyen du hamiltonien obtenu à partir de (2.4.1.) après une transformation de Kolmogorov double. La fonction génératrice de la transformation est :

$$F(I,x,t) = Ix + M_o \frac{(1 + \alpha I + \beta I^2)}{I} \sin x +$$

$$P_o \frac{\left(1 + \alpha'(1-I) + \beta'(1-I)^2\right)}{k(I-1)} \sin k(x-t) \qquad (2.4.3.)$$

De nouvelles variables (I,Θ) sont ainsi définies :

$$v = \frac{\partial F}{\partial x} = I + M_o \frac{(1 + \alpha I + \beta I^2)}{I} \cos x +$$

$$P_o \frac{\left(1 + \alpha'(1-I) + \beta'(1-I)^2\right)}{I - 1} \cos k(x-t) \qquad (a)$$

et

$$\Theta = \frac{\partial F}{\partial I} = x + M_o \left(\beta - \frac{1}{I^2}\right) \sin x + \frac{P_o}{k} \left[\beta' - \frac{1}{(I-1)^2}\right] \sin k(x-t) \qquad (b)$$

dans lesquelles le hamiltonien (2.4.1.) s'écrira :

$$\mathcal{H}(I,\Theta,t) = \frac{I^2}{2} + A_{\alpha\beta}(I) M_o^2 \cos^2 x(I,\Theta) + B_{\alpha'\beta'}(I) P_o^2 \cos^2 k\left(x(I,\Theta) - t\right)$$

$$+ C_{\alpha\beta\alpha'\beta'}(I) M_o P_o \cos x(I,\Theta) \cos k\left(x(I,\Theta) - t\right) +$$

$$D_{\alpha\beta}(I) M_o^3 \cos^3 x(I,\Theta) + E_{\alpha'\beta'}(I) P_o^3 \cos^3 k\left(x(I,\Theta) - t\right) +$$

$$F_{\alpha\beta\alpha'\beta'}(I) M_o^2 P_o \cos^2 x(I,\Theta) \cos k\left(x(I,\Theta) - t\right) +$$

$$G_{\alpha\beta\alpha'\beta'}(I) M_o P_o^2 \cos x(I,\Theta) \cos^2 k\left(x(I,\Theta) - t\right) \qquad (2.4.5.)$$

Les expressions des coefficients $A_{\alpha\beta}$, $B_{\alpha'\beta'}$, $C_{\alpha\beta\alpha'\beta'}$, $D_{\alpha\beta}$, $E_{\alpha'\beta'}$, $F_{\alpha\beta\alpha'\beta'}$ et $G_{\alpha\beta\alpha'\beta'}$ sont données dans l'appendice (II).

Le comportement du seuil observé numériquement pour $\alpha = \alpha' = 0$, $\beta = \beta'$, $M_o = P_o$ et $k = 1$ peut être expliqué au moyen du hamiltonien (2.4.5.). Pour $I = \frac{1}{2}$ et $\beta = 4$ tous les coefficients $A_{\alpha\beta}$, ..., $G_{\alpha\beta\alpha'\beta'}$ s'annulent et $\mathcal{H}(I = \frac{1}{2}, \Theta, t) = \frac{1}{4}$. La droite $I = \frac{1}{2}$ constitue une courbe invariante pour cet hamiltonien soit une barrière à la stochasticité de grande échelle. Ceci explique donc l'existence d'un seuil infini pour $\beta = -4$ observé numériquement. Pour $I = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{4}{3}$, les

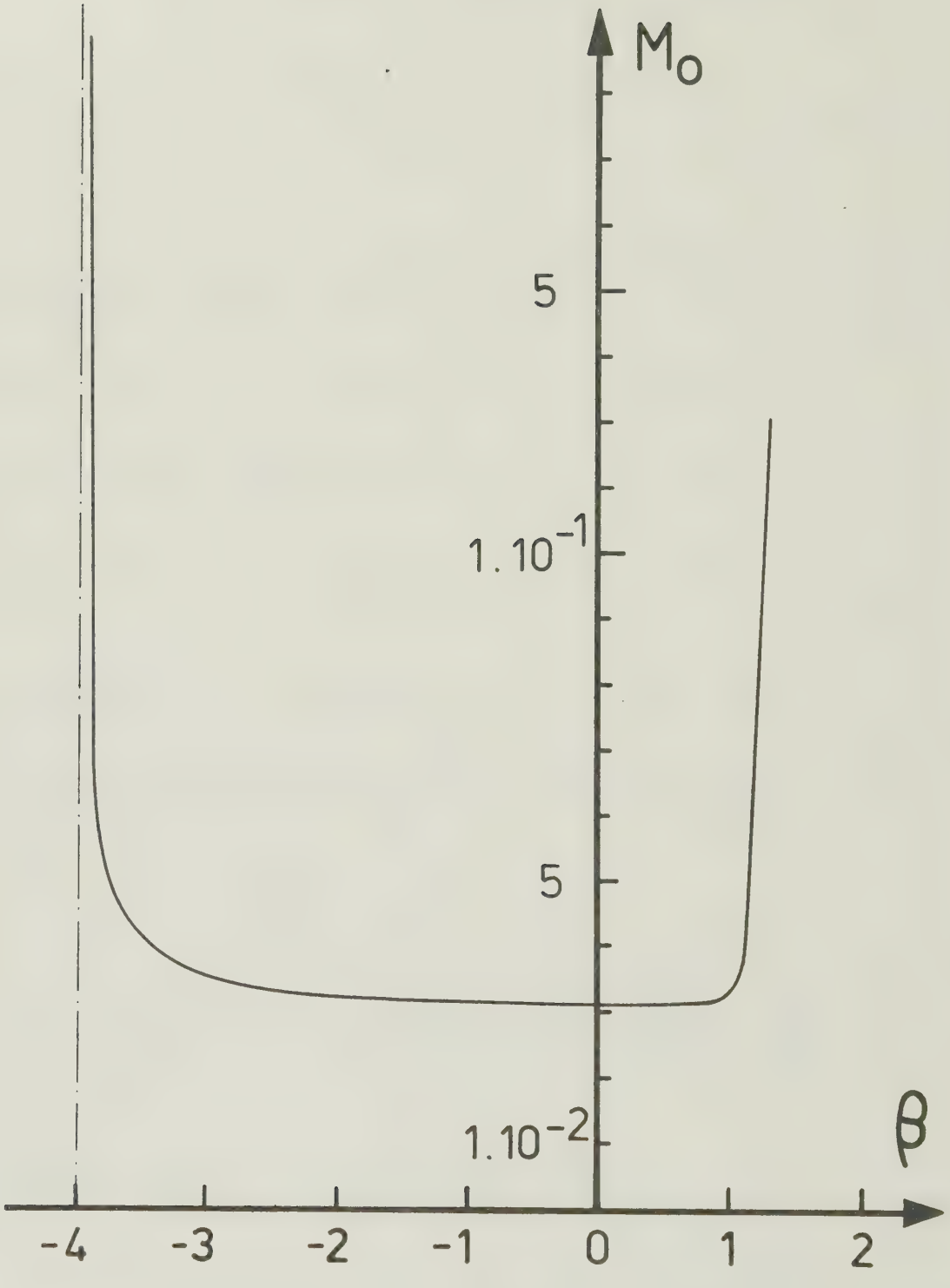


Fig. 2.2 : Seuil de stochasticité (calculé numériquement) $M_o(\beta)$ du hamiltonien :

$$H(v,x,t) = \frac{1}{2} v^2 - M_o(1 + \beta v^2) \cos x - M_o[1+\beta (1-v)^2] \cos(x-t).$$

amplitudes des résonances d'ordre M_o^2 s'annulent. Les grosses résonances du système ayant disparu, il ne reste que celles d'ordre M_o^3 qui conduisent à une remontée du seuil. La valeur numérique de ce seuil est $M_o\left(\beta = \frac{4}{3}\right) \simeq 13$, soit quatre fois la valeur du "plateau" $\left(M_o(\beta=0)\right)$ voir fig. (2.2.).

Une condition suffisante pour que l'A.R.C. reste valable pour le hamiltonien $\mathcal{H}$ donné par (2.4.1.) est que la valeur des amplitudes des résonances du second ordre en M_o et P_o de (2.4.5.) ne varie pas trop par rapport au cas où $\alpha = \alpha' = 0$ et $\beta = \beta' = 0$ (on néglige les termes de 3ème ordre en M_o et P_o). On obtient alors les relations suivantes pour les amplitudes estimées en $I = \frac{1}{2}$.

$$A_{\alpha\beta}(I = \tfrac{1}{2}) \simeq A_{oo}(I = \tfrac{1}{2}) \qquad (a)$$

$$B_{\alpha'\beta'}(I = \tfrac{1}{2}) \simeq B_{oo}(I = \tfrac{1}{2}) \qquad (b)$$

$$C_{\alpha\beta\alpha'\beta'}(I = \tfrac{1}{2}) \simeq C_{oooo}(I = \tfrac{1}{2}) \qquad (c)$$

(2.4.6.)

Soit en utilisant les résultats de l'appendice II :

$$\left.\begin{aligned} &\left| \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta\alpha}{2} + \frac{3\beta^2}{16} \right| \ll 1 \qquad (a) \\ &\left| \frac{\beta'}{2} + \frac{\alpha'^2}{4} + \frac{\beta'\alpha'}{2} + \frac{3\beta'^2}{16} \right| \ll 1 \qquad (b) \\ &\left| \frac{\beta + \beta' + \alpha(\alpha'+\beta') + \beta'\alpha'}{4} + \frac{3\beta\beta'}{16} \right| \ll 1 \qquad (c) \end{aligned}\right\} \quad (2.4.7.)$$

Les relations (2.4.7.) donnent des conditions suffisantes d'application de l'A.R.C. pour le hamiltonien (2.4.1).

5. CONCLUSION.

Dans ce chapitre nous avons vu que l'hypothèse de trajectoire faiblement perturbée utilisée dans la version originale de la renormalisation développée par ESCANDE et DOVEIL, conduisait à des résultats en désaccord avec les calculs numériques pour des hamiltoniens dont l'amplitude des résonances dépend de la vitesse. Nous avons alors proposé deux méthodes analytiques qui expliquent ce désaccord. Cette analyse suggère une nouvelle approximation : l'approximation de résonance centrée (A.R.C.). Armés de celle-ci, nous nous proposons dans ce qui suivra de donner une nouvelle formulation de la transformation de renormalisation.

CHAPITRE III

RENORMALISATION ET TRANSITION AU CHAOS DANS LES SYSTEMES HAMILTONIENS

Le chapitre précédent a clairement montré la nécessité d'abandonner pour les termes résonnants l'approximation de trajectoire faiblement perturbée et de la remplacer par l'approximation de résonance centrée.

L'espace des phases associé aux systèmes hamiltoniens se caractérise par l'existence d'une certaine invariance d'échelle : la structure du système se répète à l'infini à des échelles de plus en plus petites. Dans ce chapitre, nous définissons une transformation, appelée transformation de renormalisation (K. Wilson, 1975) qui permet de passer d'une échelle à la suivante et d'observer ainsi le système avec une finesse d'autant plus grande que cette transformation est itérée un grand nombre de fois.

La transformation de renormalisation développée ci-après est une version modifiée de E.D. En effet l'approximation de trajectoire faiblement perturbée est remplacée* par l'approximation de résonance centrée suggérée par les calculs numériques et confirmée par l'étude analytique comme nous l'avons vu au chapitre précédent. Il convient de préciser que cette transformation de renormalisation est non rigoureuse en ce sens que sa définition fait appel à un certain nombre d'approximation dont la justification vient du fait que la méthode permet de calculer avec une bonne précision les seuils observés numériquement et d'expliquer un grand nombre de propriétés universelles pour les systèmes hamiltoniens à deux degrés de liberté.

La transformation de renormalisation définie pour le hamiltonien paradigme H_p donné par (2.1.2) présente un intérêt particulier dans la théorie que nous développerons, aussi allons-nous montrer comment partant d'un hamiltonien général à deux degrés de liberté, on peut se ramener localement au hamiltonien paradigme.

* pour les termes résonnants

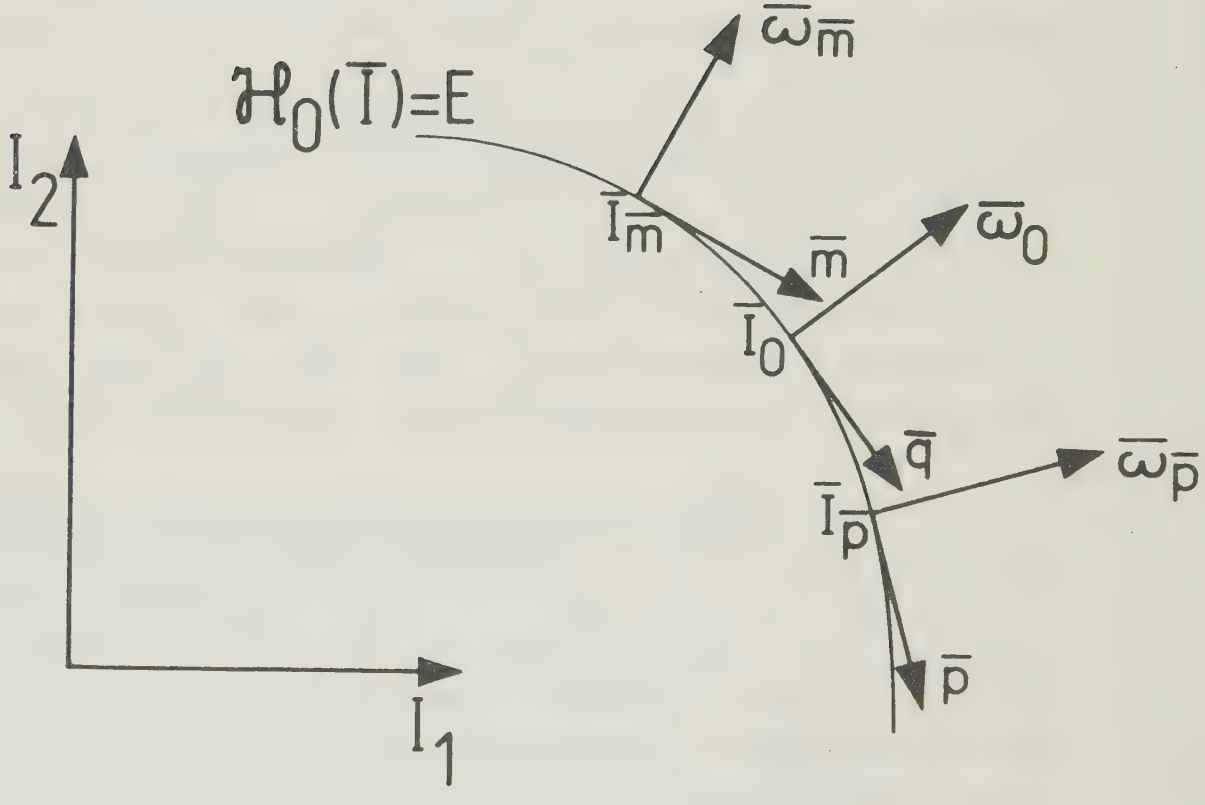


Fig. 3.1 : Surface d'énergie $\mathcal{H}_o(\bar{I}) = E$ dans le plan (I_1, I_2)

1. PASSAGE D'UN HAMILTONIEN GENERAL A L'HAMILTONIEN PARADIGME.

Nous montrons dans ce qui suivra que, partant d'un hamiltonien général à 2 degrés de liberté, on peut se ramener localement à l'hamiltonien donné par (2.1.2) moyennant trois approximations. Considérons le système à deux degrés de liberté général suivant :

$$\mathcal{H}(\bar{I},\bar{\theta}) = \mathcal{H}_o(\bar{I}) + \varepsilon \mathcal{V}(\bar{I},\bar{\theta}) \qquad (3.1.1)$$

où $\bar{I} = (I_1, I_2)$ et $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ sont les variables d'action et d'angle conjuguées. $\mathcal{H}_o(I)$ est la partie intégrable de l'hamiltonien $\mathcal{H}(\bar{I},\bar{\theta})$. Nous supposons $\mathcal{H}_o(\bar{I})$ suffisamment non linéaire par rapport à (I_1, I_2) (Cf 3.6.).

Nous supposons la perturbation $\mathcal{V}(\bar{I},\bar{\theta})$ donnée généralement comme fonction périodique de période 2π en θ_1 et θ_2 dont la décomposition en série de Fourier donne une famille de résonances discrètes

$$\mathcal{V}(\bar{I},\bar{\theta}) = \sum_{i \in J} V_i(\bar{I}) \cos(\bar{p}_i . \bar{\theta}) \qquad (3.1.2)$$

où $\bar{p}_i$ est un vecteur bidimensionel et J un ensemble tel que : card J > 1. Les vecteurs $\bar{p}_i$ sont non colinéaires de façon que $\mathcal{H}_o$ soit non intégrable.

Définissons la fréquence par $\bar{\omega} = \frac{\partial \mathcal{H}_o}{\partial \bar{I}}$. Dans la limite $\varepsilon = o$, la condition de résonance pour la résonance i s'écrit

$$\bar{p}_i \cdot \bar{\omega}(\bar{J}) = 0 \qquad (3.1.3)$$

Ceci définit une valeur $\bar{I}_i$ de $\bar{I}$. Cette valeur se trouve sur la courbe d'énergie $\mathcal{H}_o(\bar{I}) = E$. Ainsi les vecteurs $\bar{I}$ sont ordonnés sur cette courbe. De par sa définition, le vecteur $\bar{\omega}_i = \bar{\omega}(I_i)$ est normal en $\bar{I}_i$ à la courbe d'énergie $\mathcal{H}_o(\bar{I}) = E$ (voir Fig. 3.1).

On se propose d'étudier le mouvement au voisinage d'un tore caractérisé par une fréquence $\bar{\omega}_o$ et relié dans la limite $\varepsilon = o$ à la valeur $\bar{I}_o$ définie par la condition :

$$\bar{\omega}_o = \bar{\omega}(\bar{I}_o) \tag{3.1.4}$$

La première approximation consiste à ne retenir dans l'infinité de termes du développement (3.1.2) que les deux termes correspondant aux 2 résonances les plus proches du tore considéré. C'est ce que l'on appelle l'approximation à 2 résonances*. Soient m et p ces résonances. On a donc :

$$\mathcal{H}'(\bar{I},\bar{\theta}) = \mathcal{H}_o(\bar{I}) + \varepsilon \sum_{i=m,p} V_i(\bar{I}) \cos(\bar{p}_i.\bar{\theta}) \tag{3.1.5}$$

Soit $\bar{q}$ un vecteur perpendiculaire à $\bar{\omega}_o$ donc tangent à la courbe d'énergie en $\bar{I}_o$. Une transformation canonique transforme les $\bar{I}$ en un nouveau repère dirigé le long de $\bar{\omega}_o$ et $\bar{q}$. Elle est engendrée par la fonction génératrice

$$F(\zeta,\eta,\bar{\theta}) = \bar{\theta} \cdot (\bar{I}_o + \zeta\, \bar{q} + \eta\, \bar{\omega}_o) \tag{3.1.6}$$

De nouvelles variables $\bar{J} = (\zeta,\eta)$ et $\bar{\Phi} = (\varphi,\psi)$ sont ainsi définies. On a alors à partir de (3.1.6) :

$$\bar{I} = \frac{\partial F}{\partial \bar{\theta}} = \bar{I}_o + \zeta\, \bar{q} + \eta\, \bar{\omega}_o \qquad \text{(a)}$$

$$\varphi = \frac{\partial F}{\partial \zeta} = \bar{q} \cdot \bar{\theta} \qquad \text{(b)} \tag{3.1.7}$$

$$\psi = \frac{\partial F}{\partial \eta} = \bar{\omega}_o \cdot \bar{\theta} \qquad \text{(c)}$$

Soient (α_i, β_i) $i = m,p$ définis par :

$$\bar{p}_i = \alpha_i\, \bar{q} - \beta_i\, \bar{\omega}_o \tag{3.1.8}$$

Dans ce cas :

$$\bar{p}_i \cdot \theta = \alpha_i\, \varphi - \beta_i\, \psi \tag{3.1.9}$$

On approximera ensuite, la courbe d'énergie $\mathcal{H}_o = E$ par sa parabole osculatrice au voisinage de l'action $\bar{I}_o$ du tore considéré. Dans le repère formé des axes tangentiel et normal à $\bar{I}_o$, $\mathcal{H}_o$ sera donné par une fonction parabolique

* Cette approximation est classique [11] et revient à retenir les perturbations les plus lentes du mouvement (Cf. 3.2.b).

$$\mathcal{H}''(\zeta,\eta,\varphi,\psi) = \frac{1}{2}\, a\, \zeta^2 + \omega_o^2\, \eta + \varepsilon \sum_{i=m,p} U_i(\zeta,\eta) \cos(\alpha_i\, \varphi - \beta_i\, \psi) \qquad (3.1.10)$$

où $U_i(\zeta,\eta) = V_i(\bar{J})$

et $a = \bar{q} \cdot \bar{\bar{\sigma}}_o \cdot \bar{q}$ avec $\bar{\bar{\sigma}}_o = \left.\frac{d\bar{\omega}}{d\bar{I}}\right|_{\bar{I}_o}$.

Le terme constant $\mathcal{H}_o(\bar{I}_o)$ a été omis car il ne modifie pas la dynamique. Dans la limite $\varepsilon = o$, ζ et η sont reliés par : $E'' = \frac{1}{2}\, a\, \zeta^2 + \omega_o^2\, \eta$ sur la courbe d'énergie $\mathcal{H}'' = E''$. Ceci définit $\eta = \eta(\zeta)$. En utilisant cette relation on approxime $U_i(\zeta,\eta)$ par $T_i(\zeta) = U_i[\zeta,\eta(\zeta)]$ et nous obtenons ainsi :

$$\mathcal{H}^{(3)}(\zeta,\eta,\varphi,\psi) = \frac{1}{2}\, a\, \zeta^2 + \omega_o^2\, \eta + \varepsilon \sum_{i=m,p} T_i(\zeta) \cos(\alpha_i\, \varphi - \beta_i\, \psi) \qquad (3.1.11)$$

L'évolution de ψ est alors donnée par :

$$\psi = \omega_o^2\, t + \psi_o. \qquad (3.1.12)$$

où la constante ψ_o peut toujours être annulée par un choix judicieux de l'origine des temps. La dynamique de (ζ,φ) est décrite par le système hamiltonien à un degré de liberté dépendant du temps :

$$\mathcal{H}^{(4)}(\zeta,\varphi,t) = \frac{1}{2}\, a\, \zeta^2 + \varepsilon \sum_{i=m,p} T_i(\zeta) \cos(\alpha_i\, \varphi - \gamma_i t) \qquad (3.1.13)$$

où $\gamma_i = \omega_o^2\, \beta_i$

La transformation de (ζ,φ) à (w,x) définie par une fonction génératrice

$$F(\zeta,x) = \zeta(x + \gamma_m\, t) \,/\, \alpha_m + \lambda x + \mu t \qquad (3.1.14)$$

où $\lambda = -\gamma_m / (a\alpha_m^2)$ et $\mu = a\alpha_m^2 \lambda^2 / 2 + \gamma_m \lambda$ nous procure un nouvel hamiltonien.

$$\mathcal{H}^{(5)}(w,x,t) = \frac{1}{2} a \alpha_m^2 w^2 + \varepsilon \{T_m[\alpha_m(w-\lambda)] \cos x + T_p[\alpha_m(w-\lambda)] \cos(kx-\omega t)\} \tag{3.1.15}$$

où $\omega = -\alpha_p(v_m - v_p)$ avec $v_i = \gamma_i / \alpha_i$ et $k = \alpha_p / \alpha_m$.
Le tore $\mathcal{T}_o$ correspond maintenant à $w_o = \lambda$. Définissons un nouveau temps $t' = \omega t / k$ et une nouvelle vitesse $v = k a \alpha_m^2 w/\omega$. Le mouvement en (v,x) est défini par le hamiltonien :

$$\mathcal{H}^{(6)}(v,x,t') = \frac{v^2}{2} - M(v) \cos x - P(v) \cos k(x-t') \tag{3.1.16}$$

où M(v) et P(v) sont donnés par $A_i(v)$:

$$A_i(v) = -\varepsilon a \alpha_m^2 \left(\frac{k^2}{\omega}\right) T_i[\omega v / (ak\alpha_m) - \alpha_m \lambda] \tag{3.1.17}$$

pour i = m,p.

A ce stade on voit qu'à partir d'un hamiltonien général à deux degrés de liberté donné par (3.1.1) on peut se ramener à un hamiltonien du type (3.1.16) où les amplitudes des résonances sont fonctions de la vitesse. De tels hamiltoniens furent explorés au chapitre précédent (chapitre 2) et leur étude nous conduisit à l'A.R.C.

Si on applique l'A.R.C. à (3.1.16) on obtient

$$\mathcal{H}^{(7)}(v,x,t') = \frac{v^2}{2} - M(v_M) \cos x - P(v_p) \cos k(x-t') \tag{3.1.18}$$

Posons

$$M(v_M) = M$$

$$P(v_p) = P$$

$$t' = t.$$

Le hamiltonien s'écrit alors :

$$H(v,x,t) = \frac{v^2}{2} - M \cos x - P \cos k\,(x-t) \qquad (3.1.19)$$

qui n'est rien d'autre que le hamiltonien paradigme dépendant de 3 paramètres constants. Le tore de fréquence $\bar{\omega}_o$ est associé à une vitesse :

$$v_o = \frac{\alpha_p \beta_m}{\alpha_p \beta_m - \alpha_m \beta_p} \qquad (3.1.20)$$

Intervertissant le rôle des termes m et p, on définit

$x' = \alpha_p \varphi - \gamma_p t$,

$w' = (\zeta - \gamma_p / a\alpha_p)/\alpha_p$ et avec les normalisations

$v' = - a\alpha_p\, w'/\Delta J$ et $\tau' = - \alpha_p \Delta J t$

où $\Delta J = \frac{\gamma_p}{\alpha_p} - \frac{\gamma_m}{\alpha_m}$, on obtient le hamiltonien

$$H_e(v',x',\tau') = \frac{v'^2}{2} - M' \cos x' - P' \cos k'(x'-\tau') \qquad (3.1.21)$$

$$\text{avec} \quad k' = \frac{1}{k} \qquad (a)$$

$$M' = P \qquad (b) \qquad (3.1.22)$$

$$P' = M \qquad (c)$$

pour lequel on vérifie la relation $v' = 1 - v$.

Ainsi le hamiltonien (3.1.19) caractérisé par les paramètres (M,P,k) et le hamiltonien (3.1.21) caractérisé par les paramètres (M',P',k') décrivent le même mouvement.

Nous reconnaissons dans H (ou son homologue H_e) le hamiltonien du pendule perturbé par un terme de période spatiale ou temporelle égale à $2\pi/k$.

Cet hamiltonien mérite encore plus son nom de paradigme car il est inclus localement dans tout système à un (respectivement deux) degrés de liberté rendus non intégrables par une perturbation périodique du temps (resp. des variables d'angles). C'est sur lui que portera notre étude ultérieure.

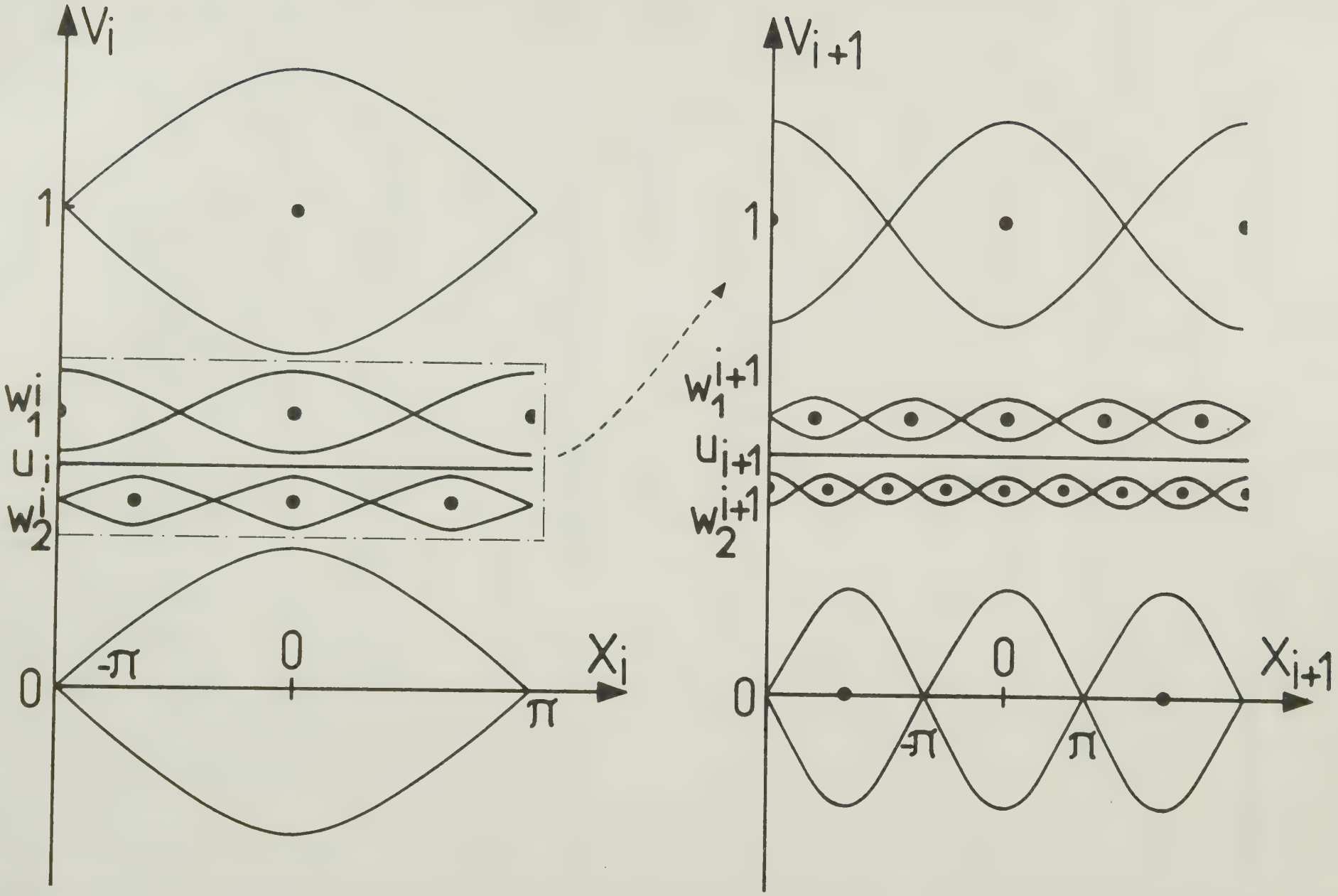


Fig. 3.2 : Description graphique de la méthode de renormalisation

2. TRANSFORMATION DE RENORMALISATION T_R.

Nous allons écrire l'expression de la transformation de renormalisation pour le hamiltonien paradigme donné par (3.1.19). On sait d'après (3.1) se ramener à cet hamiltonien à partir d'un hamiltonien général à deux degrés de liberté.

a. Approche naïve de la renormalisation.

Un système hamiltonien non intégrable à deux degrés de liberté est constitué d'une infinité de sous-systèmes emboités [2,3]. Exploitant cette notion de systèmes emboités nous allons donner dans le paragraphe suivant la méthode pour passer d'un système au sous système suivant dans le cas de H_p défini par (3.1.19). La figure (3.2) montre schématiquement l'application de Poincaré (Cf. 1.2) du hamiltonien

$$H_i(v_i,x_i,t_i) = \frac{1}{2} v_i^2 - M_i \cos x_i - P_i \cos k_i(x_i-t_i) \qquad (3.2.1)$$

(c'est le même hamiltonien qu'en (3.1.19) avec un indice i supplémentaire). La courbe $v_i = u_i$ est la trace d'un certain tore de KAM $\mathcal{T}$ avec une vitesse moyenne u_i. $\mathcal{T}$ est compris entre deux résonances d'ordre supérieur, dont les domaines de piégeage sont représentés par des chaînes de deux et trois îlots. Ces résonances ont des vitesses moyennes w_1^i et w_2^i. L'étude de la stabilité du tore $\mathcal{T}$ peut être décrite d'après le paragraphe (3.1) par un hamiltonien à 2 termes résonants.

Des changements d'échelle adéquats et de bonnes approximations nous permettrons de doter cet hamiltonien d'une structure identique à celle de H_i mais avec de nouveaux paramètres $(M_{i+1}, P_{i+1}, k_{i+1})$ donnés comme fonctions explicites des paramètres initiaux (M,P,k) et de u_i, et de nouvelles coordonnées (v_{i+1}, x_{i+1}) qui remplacent (v_i,x_i). Dans ces nouvelles coordonnées, $\mathcal{T}$ correspond à une nouvelle vitesse moyenne u_{i+1} qui dépend explicitement de k_i et u_i. De nouveau $\mathcal{T}$ est emboité entre deux chaines de cinq et huit îlots. De façon imagée, on peut dire qu'une "petite boîte" de l'espace des phases (v_i, x_i) est transformée en une "grande boîte" dans l'espace (v_{i+1}, x_{i+1}) de la Fig. (3.2). Cela définit du point de vue mathématique une transformation de renormalisation T_R à 4 paramètres (u_i,k_i,M_i,P_i).

L'itération successive de T_R permet de voir le système à une échelle de plus en plus fine. Nous observons ainsi le système sous un "microscope". Deux comportements sont alors possible . Après itération de T_R les amplitudes M_i et P_i peuvent décroître ou croître. Dans le premier cas on pourra appliquer le théorème K.A.M. après L itérations et $\mathcal{C}$ préservé dans le $L^{ième}$ sous système sera préservé dans le système initial. La destruction de $\mathcal{C}$ correspond à une croissance de l'amplitude. La frontière entre ces 2 situations nous donne le seuil de destruction de $\mathcal{C}$. L'étude d'un ensemble fini de tores nous permettra de donner une bonne estimation du seuil de S.G.E.

b. Ecriture de T_R.

Il s'agit de déterminer explicitement M_{i+1}, P_{i+1} et k_{i+1} en fonction de i, M_i, P_i et k_i et u_{i+1} en fonction de u_i, i et k_i. Appliquons la transformation de Kolmogorov à H_i donné par (3.2.1). Dans les nouvelles coordonnées (I_i, θ_i, t_i) il s'écrit :

$$\mathcal{H}_i(I_i,\theta_i,t_i) = \frac{I_i^2}{2} + \frac{M_i^2}{4I_i^2} + \frac{P_i^2}{4(I_i-1)^2}$$

$$+ \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} K_{\ell m}(I_i) \cos[(mk_i+\ell)\,\theta_i - mk_i t_i] \qquad (3.2.2)$$

Les coefficients $K_{\ell m}(I_i)$ sont calculés explicitement dans l'appendice [III]

Comme dans la théorie E.D. on ne retenait que la suite de résonances discrète R_ℓ de vitesse $\frac{k}{k+\ell}$, on ne gardera dans la sommation sur m que les termes où m = 1. Cette approximation sera justifiée à posteriori par la bonne précision des seuils de chaos et les propriétés de la transformation de renormalisation. On donnera dans l'appendice [IV] une raison supplémentaire de négliger les $K_{\ell m}$ avec ℓ et m > 1.

Le hamiltonien s'écrit :

$$\mathcal{H}_i(I_i,\theta_i,t_i) = \mathcal{H}_{o_i}(I_i) - P_i \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} V_\ell(I_i) \cos[(k_i+\ell)\,\theta_i - k_i t_i] \qquad (3.2.3)$$

où $$\mathcal{H}_{o_i}(I_i) = \frac{I_i^2}{2} + \frac{M_i^2}{4I_i^2} + \frac{P_i^2}{4(I_i-1)^2} \qquad (3.2.4)$$

et $$V_\ell(I_i) = -\frac{K_{\ell 1}(I_i)}{P_i} \qquad (3.2.5)$$

Le passage dans ces coordonnées (I,θ) constitue la première étape de la procédure de la renormalisation.

Considérons une orbite $\mathcal{O}$ de vitesse moyenne u_i (appelée aussi nombre de rotation par les mathématiciens), $0 < u_i < 1$ et définissons le nombre d'onde de u_i par :

$$Q_i = k_i / u_i \qquad (3.2.6)$$

soit $\Omega_i(I_i) = \dfrac{d\mathcal{H}_o(I_i)}{dI}$

$$\Omega_i(I_i) = I_i - M_i^2 / 2I_i^3 - P_i^2 / 2(I_i-1)^3 \qquad (3.2.7)$$

La condition de résonance s'écrit :

$$\langle\dot{\theta}_i\rangle = \Omega_i(I_{o_i}) = u_i = \Omega_o \qquad (3.2.8)$$

où I_{o_i} est l'action sur $\mathcal{O}$. Définissons alors :

$$\begin{aligned} Z_i &= Q_i - k_i && \text{(a)} \\ \ell_i &= \text{Ent}\,(Z_i) && \text{(b)} \\ \delta k_i &= Z_i - \ell_i && \text{(c)} \\ Q_i &= k_i + \ell_i + \delta k_i && \text{(d)} \end{aligned} \qquad (3.2.9)$$

avec $0 \leq \delta k_i \leq 1$ (partie fractionnaire de Z_i) et $\ell_o \geq 1$. Il en résulte que $k_i + \ell_i < Q_i < k_i + \ell_i + 1$ et l'orbite $\mathcal{O}$ sous considération est encadrée par les résonances R_{ℓ_i} et R_{ℓ_i+1}.

Nous utilisons maintenant les 3 approximations que nous avons déjà faites en (3.1). La première consiste à remplacer $\mathcal{H}_{o_i}(I_i)$ par son développement de Taylor au deuxième ordre au voisinage de I_{o_i} (de manière à conserver la non linéarité). On obtient le hamiltonien

$$\mathcal{H}'_i(I_i,\theta_i,t_i) = \mathcal{H}_{o_i}(I_{o_i}) + \Omega_o(I_i - I_{i_o}) + \frac{\sigma_{i_o}}{2}(I_i - I_{o_i})^2$$

$$- P_i \sum_{\ell=\infty}^{+\infty} V_\ell(I_i) \cos\left[(k_i+\ell)\,\theta_i - k_i t_i\right] \qquad (3.2.10)$$

où $\sigma_{i_o} = \sigma(I_{i_o})$ et $\sigma(I_i) = \dfrac{d\Omega_i}{dI}$.

Les termes constants et linéaires en I peuvent être supprimés par la transformation canonique de fonction génératrice :

$$F'(I_i,\varphi_i,t_i) = I_i\,\varphi_i + \mu\,\varphi_i + \nu\,t_i \qquad (3.2.11)$$

où
$$\mu = \Omega_o / \sigma_{i_o} - I_{i_o} \qquad (3.2.12)$$

et
$$\nu = \mathcal{H}_{i_o}(I_{i_o}) - \Omega_o(I_{i_o}+\mu) + \sigma_{i_o}(I_{i_o}+\mu)^2/2 \qquad (3.2.13)$$

qui définit les variables $J_i = I_i + \mu$ et $\varphi_i = \theta_i$ dans lesquelles le hamiltonien s'écrit :

$$\mathcal{H}''_i(J_i,\varphi_i,t_i) = \frac{\sigma_{i_o}}{2} J^2 - P \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} V_\ell(J_i) \cos\left[(k_i+\ell)\,\varphi_i - k_i t_i\right] \qquad (3.2.14)$$

La deuxième approximation constitue à ne retenir dans le développement (3.2.14) que les deux termes résonnants correspondant aux résonances $R_{\ell i}$ et $R_{\ell i+1}$ qui encadrent $\mathcal{C}$. Le fait que le hamiltonien :

$$\mathcal{H}_i^{(3)}(J_i,\varphi_i,t_i) = \frac{\sigma_{i_o}}{2} J_i^2 - P_i \sum_{\ell=\ell_i}^{\ell_{i+1}} V_\ell(J_i) \cos\left[(k_i+\ell)\,\varphi_i - k_i t_i\right] \quad (3.2.15)$$

décrive convenablement le mouvement au voisinage de I_o donnée par (3.2.8), est justifié par le fait que les deux termes retenus présentent la variation la plus lente de la phase :

$$\varphi_\ell = (k_i+\ell)\,\varphi_i - k_i t_i \simeq \frac{k_i t_i (k_i+\ell-Q_i)}{Q_i}$$

Enfin, on utilise l'A.R.C. qui consiste à calculer l'amplitude des résonances au centre de celles-ci (cette approximation sera justifiée à posteriori par la bonne précision des calculs de seuil de chaos et les propriétés de T_R). Ce qui revient à remplacer $V_\ell(J_i)$ par $V_\ell(J_i^\ell)$ avec $\ell=\ell_i,\ell_{i+1}$. Le hamiltonien devient :

$$\mathcal{H}^{(4)}(J_i,\varphi_i,t) = \frac{\sigma_{i_o}}{2} J_i^2 - P_i \sum_{\ell=\ell_i}^{\ell_{i+1}} V_\ell(J_i^\ell) \cos\left[(k_i+\ell)\,\varphi_i - k_i t_i\right] \quad (3.2.16)$$

On reconnait dans (3.2.16) le hamiltonien qui décrit le mouvement d'une particule (de masse σ_o, charge 1) dans le champ de deux ondes longitudinales d'amplitude constante ($P_i\ V_\ell\ J_i^\ell$), nombre d'onde $k_i+\ell$ et fréquence $k(\ell=\ell_i, \ell_{i+1})$ dont on sait, d'après l'appendice [I] , qu'il peut se réduire à la forme (3.1.19).

Définissons : $\lambda_{i+1} = 0$ si $\delta k_i \leq 1/2$

et $\lambda_{i+1} = 1$ si $\delta k > 1/2$

et définissons aussi $\mu_i = \ell_i + \lambda_{i+1}$

$\nu_i = \ell_i + 1 - \lambda_{i+1}$

Une nouvelle position $x_{i+1} = (k_i + \mu_i)\,\varphi_i - k_i t_i$

et un nouveau temps $t_{i+1} = \gamma_i'\, t_i$ avec

$$\gamma_i' = (2\,\lambda_{i+1} - 1)\, k_i / (k_i+\nu_i) \quad (3.2.17)$$

sont ainsi définis.

Les équations canoniques déduites à partir de $\mathcal{H}^{(4)}$ montrent que $x_{i+1}(t+1)$ vérifie l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$\ddot{x}_{i+1} = F_i^{\ell+1}(\mu_i) \sin x_{i+1} - F_i^{\ell}(\nu_i)\, k_{i+1} \sin [k_{i+1}(x_{i+1} - t_{i+1})] \qquad (3.2.18)$$

où $$k_{i+1} = (k_i+\nu_i) \,/\, (k_i+\mu_i) \qquad (3.2.19)$$

et $$F_i^j(n) = [(k_i+\mu_i)\,(k_i+\nu_i) \,/\, k_i]^2 \, P_i \, \sigma_{io} \, V_n(J_{ij})$$

$$\text{où } j = \ell \text{ ou } \ell + 1 \qquad (3.2.20)$$

L'équation (3.1.18) peut donc être déduite d'un hamiltonien (3.2.1) avec l'indice i+1 tel que :

$$\begin{aligned} M_{i+1} &= F_i^{\ell+1}(\mu_i) \\ P_{i+1} &= F_i^{\ell}(\nu_i) \end{aligned} \qquad (3.2.21)$$

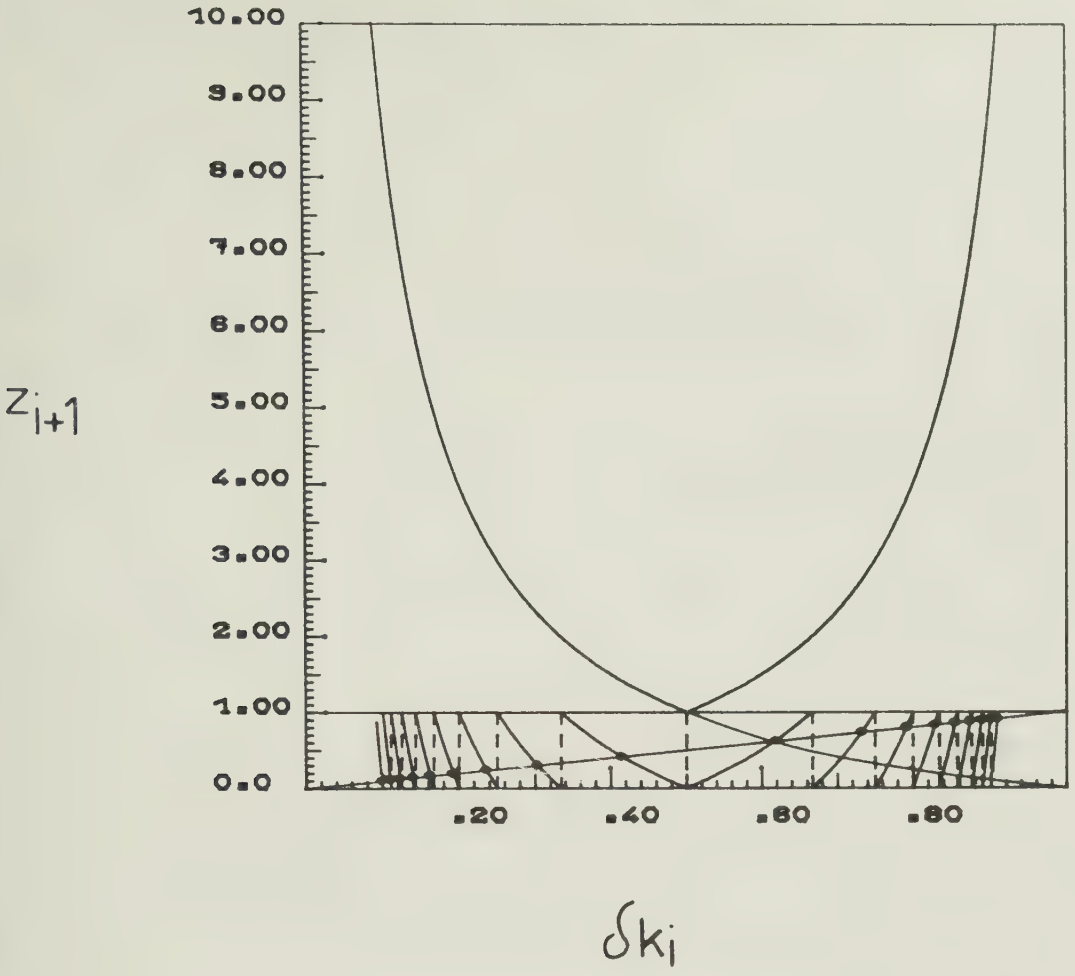
La définition de λ_{i+1} donnée auparavant implique que la résonance R_{ℓ_i} dont le nombre de rotation est le plus proche de Q_i, devient la résonance M_{i+1}. La définition de λ permet d'utiliser toujours les coefficients $K_{\ell 1}$ (Cf. 3.2.2) et non pas les K_{1m} ce qui nous donnera toujours par la suite : $M_{i+1} \propto P_i \, M_i^{(\ell_i+\lambda_i)}$ alors que l'utilisation des K_{1m} aurait donné $M_{i+1} \propto M_i \, P_i^{(\ell_i+\lambda_i)}$. De plus,cela permet d'utiliser d'emblée les résultats sur les points fixes de l'application : $\delta k_i \to \delta k_{i+1}$ de E.D.

Dans le (i+1) ième système de coordonnées, l'orbite $\mathcal{G}$ a une nouvelle vitesse u_{i+1} qui est obtenue en faisant :

$$M_i = P_i = M_{i+1} = P_{i+1} = 0$$

tels que : $$\theta_i = x_i = u_i t_i$$

et $$x_{i+1} = [(k_i+\mu_i)\, u_i - k_i]\, t_i = u_{i+1}\, t_{i+1}$$



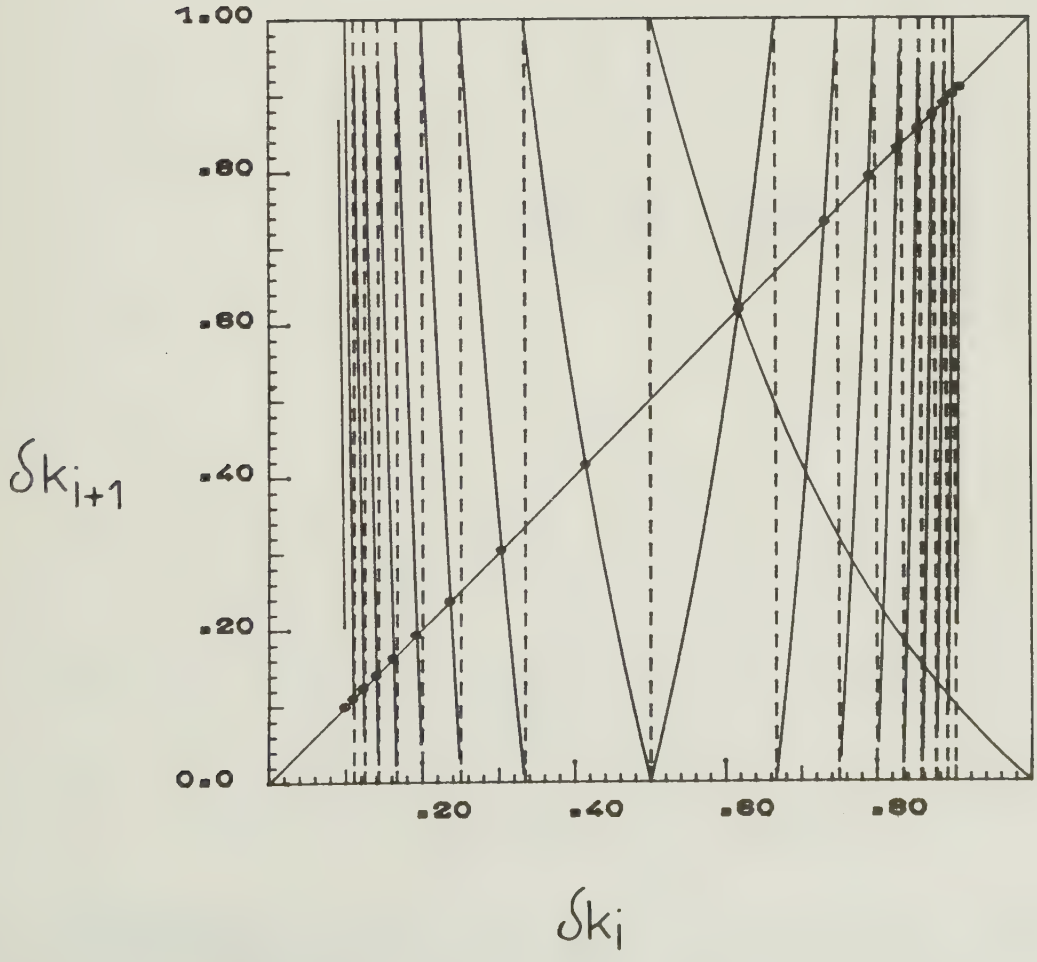


Fig. 3.3 : Représentation de z_{i+1} (δk_{i+1}) (figure supérieure) et $\delta k_{i+1}(\delta k_i)$ (figure inférieure)

ce qui donne

$$u_{i+1} = [(k_i+\mu_i)\, u_i - k_i] \,/\, \gamma_i' \qquad (3.2.22)$$

où γ_i' est donné par (3.2.17).

Le nouveau nombre d'onde de $\mathcal{G}$ est :

$$Q_{i+1} = k_{i+1} \,/\, u_{i+1} = k_{i+1} + Z_{i+1} \qquad (3.2.23)$$

où $$Z_{i+1} = (1 - \lambda_{i+1} - \delta k_i) \,/\, (\delta k_i - \lambda_{i+1})$$

De là on constate que ℓ_{i+1}, δk_{i+1} et λ_{i+2} dépendent seulement de δk_i. Cette dépendance est donnée par la Figure 3.3. On remarque que si $\ell_o \geq 1$, par suite $\ell_{i+1} \geq 1$ aussi. Si $\ell_o = o$, on considèrera le hamiltonien homologue $H_e(1/k_i, P_i, M_i)$ et pour lequel $\ell_i' = \mathrm{Ent}[Q_i' - k_i'] \geq 1$ aussi.

L'application Tr de $(u_i, H_i) \to (u_{i+1}, H_{i+1})$ définie par les équations (3.2.8) et (3.2.19) à (3.2.22) est une transformation de renormalisation. Cette dernière est la même que celle de E.D. sauf que les $F_i^j(n)$ donnés par (3.2.20) sont différents.

Les résonances primaires M_{i+1} et P_{i+1} de H_{i+1} sont les résonances R_{μ_i} et R_{ν_i} de $\mathcal{H}_1$ donné par (3.2.3). La différence en vitesse existant dans le système initial $w^i_{\ell_i} - w^i_{\ell_{i+1}}$ a subi un changement d'échelle de manière à ce qu'elle soit égale à 1 dans H_{i+1}. La transformation T_R nous permet ainsi de passer d'une échelle à la suivante et d'observer le système avec une finesse d'autant plus grande que T_R est itérée un grand nombre de fois.* D'après (3.2.23) on remarque qu'en itérant T_R on définit une suite de couples $(\ell_i, \lambda_i = \lambda(\delta k_{i-1}))$ avec $\ell_i \geq 1$ qui ne dépend que de la valeur initiale δk_o de δk.

* Le passage du hamiltonien général $\mathcal{H}$ à H paradigme est déjà une première étape dans la renormalisation, puisqu'on a isolé un sous-système du système initial grâce à l'approximation à deux résonances.

Tableau I : Algorithme de passage entre les deux représentations de δk_o.

<table>
<tr><th>$(n_i, \lambda_i) \rightarrow a_j$</th><th>$a_j \rightarrow (n_i, \lambda_i)$</th></tr>
<tr><td>(1) Faire J = 0, i = 1
(2) λ_i est-il égal à 0 ?
(3)<table><tr><th>oui</th><th>non</th></tr><tr><td>ajouter 1 à J
$a_J = n_i + 1$</td><td>ajouter 1 à J
$a_J = 1$
ajouter 1 à J
$a_J = n_i$</td></tr></table></td><td>(1) Faire J = 1, i = 1
(2) a_j est-il égal à 1 ?
(3)<table><tr><th>oui</th><th>non</th></tr><tr><td>$\lambda_i = 1$
$n_i = a_J + 1$
ajouter 2 à J</td><td>$\lambda_i = 0$
$n_i = a_J - 1$
ajouter 1 à J</td></tr></table></td></tr>
<tr><td colspan="2">(4) ajouter 1 à i
(5) retourner à la question 2</td></tr>
</table>

Prenons comme système initial celui ou i = o

$$Z_1 = Q_1 - k_1 = \frac{1-\lambda_o-\delta k_o}{\delta k_o-\lambda_o} = \begin{cases} (1-\delta k_o) \,/\, \delta k_o & \text{si } \lambda = o \\ \delta k_o \,/\, (1-\delta k_o) & \text{si } \lambda = 1 \end{cases} \tag{3.2.24}$$

et considérons le développement en fraction continue de δk_o

$$\begin{aligned} \delta k_o &= 1 \,/\, [a_1+1 \,/\, (a_2+1 \,/\, ...)] \\ &= [a_1, a_2, ...] \end{aligned} \tag{3.2.25}$$

Par définition :

$$a_1 = \text{Ent}[1 \,/\, \delta k_o] \tag{3.2.26}$$

et $$a_2 = \text{Ent}[1 \,/\, (1/\delta k_o - a_1)] = \text{Ent}[\delta k_o \,/\, (1-a_1\, \delta k_o)] \tag{3.2.27}$$

On remarque que :

i) si $\lambda_o = \lambda(\delta k_o) = o$, i.e., $o < \delta k_o < \frac{1}{2}$,

alors on a directement

$a_1 - 1 = \text{Ent}[1 \,/\, \delta k_o - 1] = \text{Ent}(Z_1) = \ell_1$

donc $a_1 = \ell_1 + 1$.

ii) si $\lambda_o = 1$, i.e. $\frac{1}{2} < \delta k_o < 1$ alors,

$a_1 = \text{Ent}[1 \,/\, \delta k_o] = 1$ et $a_2 = \text{Ent}[\delta k_o \,/\, (1-\delta k_o)] = \text{Ent}(Z_1) = \ell_1$

On constate ainsi qu'il existe une correspondance biunivoque entre le développement en fraction continue de δk_o et la suite (ℓ_i, λ_i) qu'il engendre. Le tableau I donne deux algorithmes pour calculer les a_j à partir des (ℓ_i, λ_i) et réciproquement.

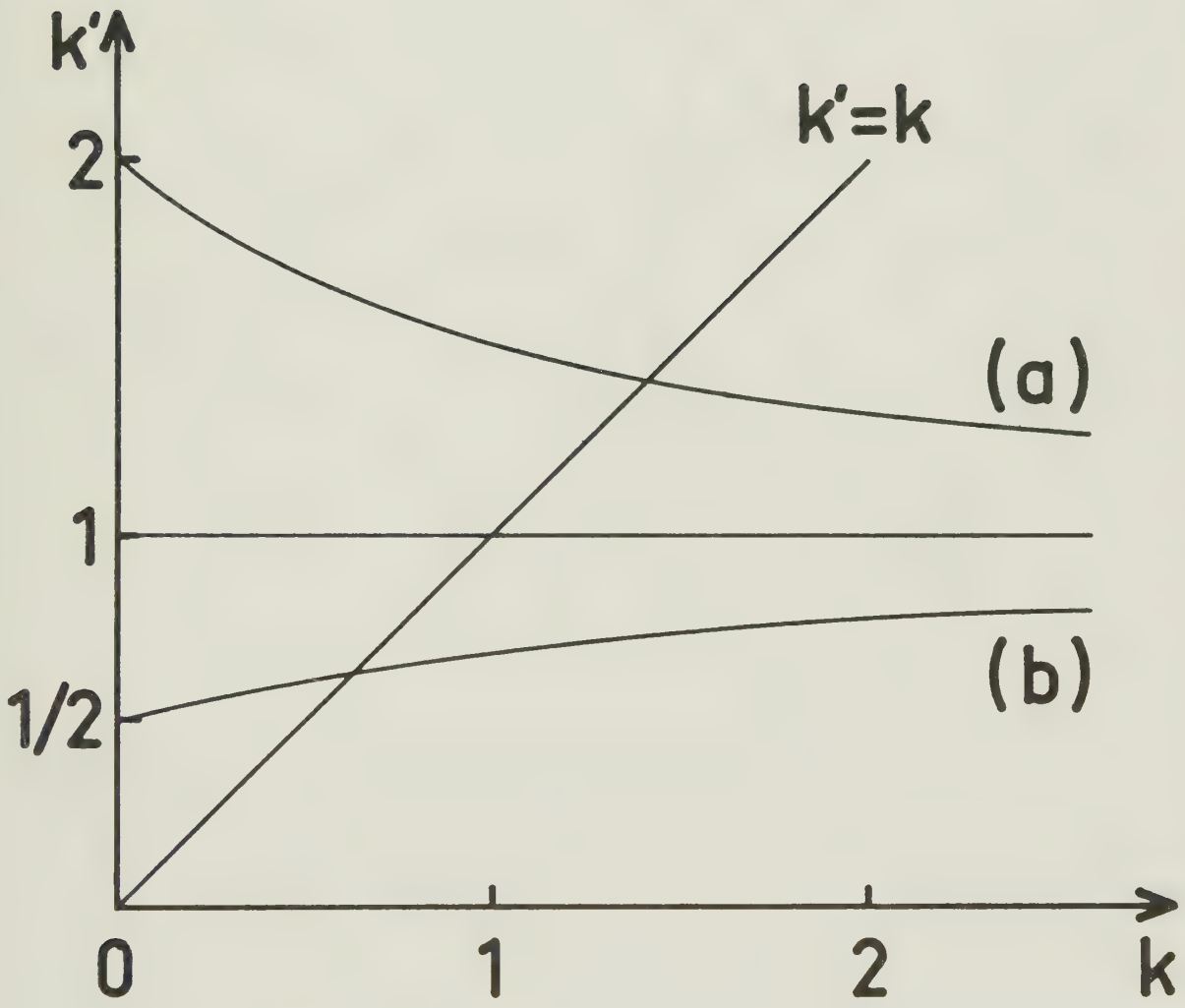


Fig. 3.4 : Courbe k' = f (k)

k' en fonction de k pour $\ell_i = 1$ et $\lambda_{i+1} = 0$ (a) $\lambda_{i+1} = 1$ (b)

c. Points fixes de T_R.

L'équation (3.2.23) nous montre le rôle dominant de l'application $\delta k_i \to \delta k_{i+1}$. Cette application a une infinité de points fixes irrationnels donnés par

$$\delta k_n^\lambda = \frac{1}{2}\{[n^2 + (4-2\lambda')\ n + 5\lambda']^{\frac{1}{2}} - n - \lambda'\} \qquad (3.2.28)$$

où $n = \ell_i$, $\lambda' = 1 - \lambda$ avec $\lambda = o$ ou $\lambda = 1$ $(n \geq 1)$.

Du tableau I on en déduit :

$$\delta k_n^o = [n+1,\ n+1, \ldots]$$

et

$$\delta k_n^1 = [1,\ n,\ 1,\ n,\ \ldots]$$

On constate que $\delta k_o^o = \delta k_1^1 = \frac{(\sqrt{5}-1)}{2} = g - 1$ (où g = nombre d'or).

Les points fixes de l'application $k_i \to k_{i+1}$ sont donnés par

$$k_n^\lambda = \delta k_n^\lambda + 1 - \lambda \qquad (3.2.29)$$

Considérons les tores $\mathcal{T}_n^\lambda$ de nombre d'onde $Q_o = k_o + n + \delta k_n^\lambda$ et itérons T_R avec l'ensemble des paramètres initiaux $(\delta k_n^\lambda,\ n,\ k_o,\ M_o,\ P_o)$. ($\ell_i = n$ et $\delta k_i = \delta k_n^\lambda$ pour tout i). L'équation (3.2.19) montre que k_{i+1} dépend seulement de k_i (voir figure 3.4) et a un point fixe stable donné par (3.2.29). Vu que ℓ_i et δk_i sont fixés, on se restreindra à l'application qui à $(k_i,\ M_i,\ P_i)$ fait correspondre $(k_{i+1},\ M_{i+1},\ P_{i+1})$ (voir figure 3.5). Cette application a un point fixe hyperbolique F_n^λ dont la variété stable est de dimension 2 et sépare les bassins d'attraction $\mathcal{D}_i$, i = 1,2 des points fixe triviaux $\pi_o = (k_n^\lambda,\ o,\ o)$ et $\pi_1 = (k_n^\lambda,\ \infty,\ \infty)$. Si h $(k_o,\ M_o,\ P_o)$ est situé du même côté que π_o, on dira alors que h est en dessous de $\mathcal{S}_n^\lambda$ et après un nombre fini L d'itérations de l'application, M_L et P_L sont assez petits pour que l'on puisse appliquer le théorème K.A.M. dans le voisinage de π_o. Il existe donc au voisinage de $\mathcal{T}_n^\lambda$, un continuum de tores préservés et

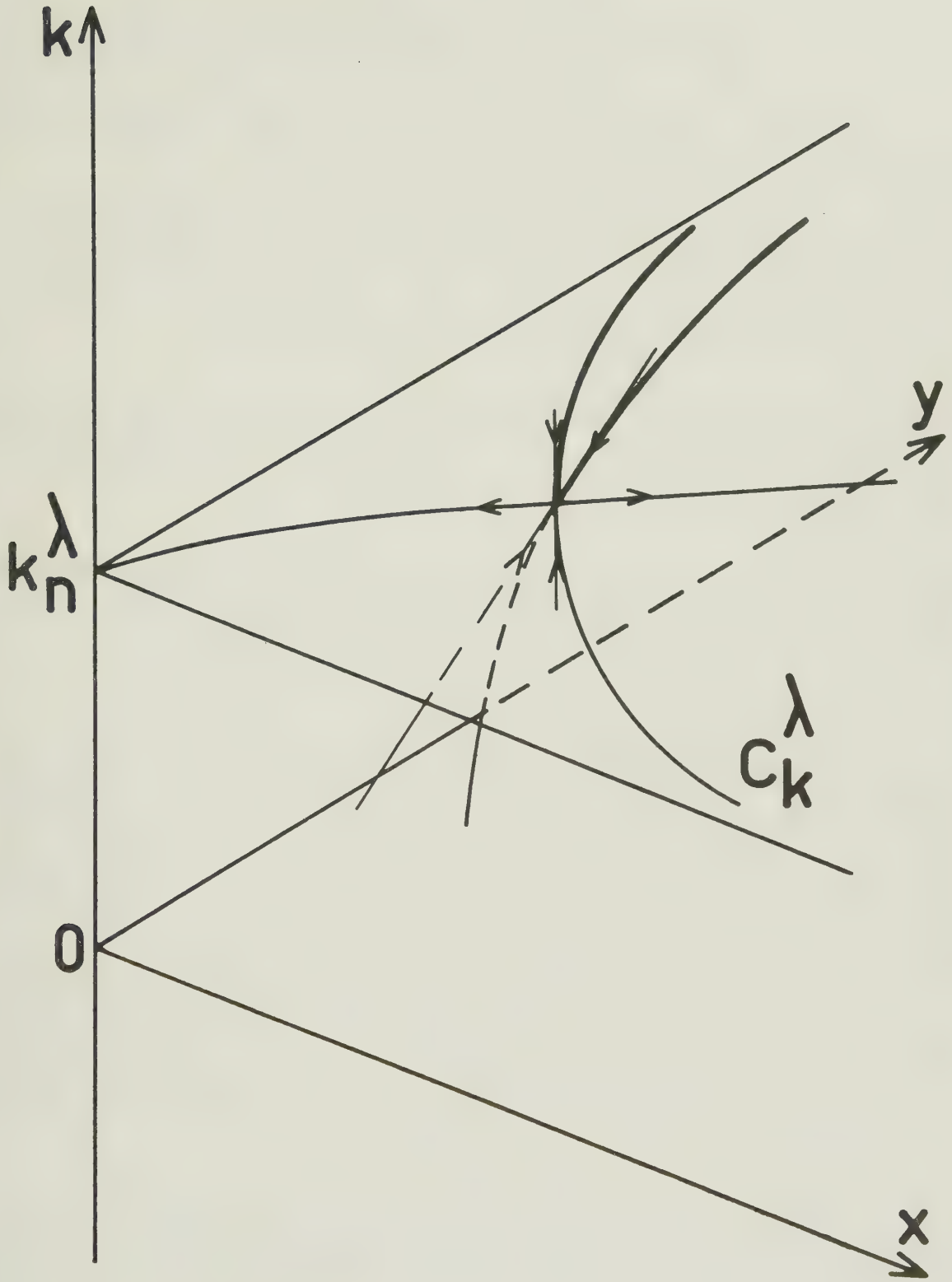


Fig. 3.5 : Point fixe hyperbolique de l'application

$(k_i, M_i, P_i) \rightarrow (k_{i+1}, M_{i+1}, P_{i+1})$

$\mathcal{C}_n^\lambda$ ne peut qu'être lui-même préservé, sinon il serait remplacé par une couche stochastique de largeur finie qui ne pourrait guère être incluse dans une zone de plus en plus étroite quand L augmente. $\mathcal{C}_n^\lambda$ préservé dans un sous-système contenu dans le système global est donc conservé.

Quand (k_o, M_o, P_o) est au dessus de $\mathcal{J}_n^\lambda$ (il appartient à $\mathcal{D}_2$), alors les résonances se recouvrent de plus en plus fortement et $\mathcal{C}_n^\lambda$ est détruit et remplacé par une couche stochastique. Il n'existe cependant aucun théorème mathématique affirmant que $\mathcal{C}_n^\lambda$ est détruit.

Les tores $\mathcal{C}_n^\lambda$ sont appelés tores universels car ils sont reliés à un point fixe hyperbolique F_n^λ de T_R et ont ainsi le même comportement pour n'importe quel H_o.

Nous avons ainsi construit une transformation de renormalisation qui agit comme un microscope sur le système étudié. Elle nous permet de voir plus finement une région de l'espace des phases considéré.

L'itération de cette transformation partant d'un système initial caractérisé par les paramètres initiaux (k_o, M_o, P_o) nous conduit à deux possibilités. Soit les amplitudes M_L et P_L après L itérations décroissent et nous permettent d'appliquer le théorème K.A.M. (la stabilité du tore considéré est ainsi déduite), soit ces amplitudes divergent. Cette approche nous permet de calculer analytiquement les points fixes de T_R ainsi que les variétés stables $\mathcal{J}_n^\lambda$. Notons que dans l'ancienne version de la renormalisation E.D., étant donné la complexité des expressions (fonctions elliptiques) qui intervenaient, il était impossible de déduire analytiquement les points fixes ou les équations des variétés. Le seul recours était le calcul numérique [14].

Maintenant, avec la nouvelle version de la transformation de renormalisation, une moisson de résultats analytiques peut être réalisée. Pour ce faire, on définira dans ce qui suit une transformation de renormalisation simplifiée t_R proche de T_R, pour laquelle on peut déduire* l'expression des points fixes des valeurs propres et des directions propres associées à ces points fixes ainsi que les variétés stables $\mathcal{J}_n^\lambda$. Nous établirons ensuite les corrections à ces résultats simplifiés.

* exactement

3. TRANSFORMATION DE RENORMALISATION SIMPLIFIEE t_R.

a. Ecriture de t_R.

Nous considèrerons la transformation de renormalisation simplifiée t_R qui transforme (k, M, P) en(k', M', P'). Elle agit sur 3 paramètres. D'après (3.2.21) ; si l'on s'intéresse à la stabilité d'un tore $\mathcal{C}_n^\lambda$, T_R s'écrit

$$M' = \left[(k+n+\lambda)\ (k+n+1-\lambda)\ /\ k\right]^2 P\sigma_o\ V_{n+\lambda}(I_M) \qquad (a)$$

$$P' = \left[(k+n+\lambda)\ (k+n+1-\lambda)\ /\ k\right]^2 P\sigma_o\ V_{n+1-\lambda}(I_p) \qquad (b) \qquad (3.3.1)$$

$$k' = (k+n+1-\lambda)\ /\ (k+n+\lambda) \qquad (c)$$

où I_M et I_p désignent l'action calculée au centre des résonances M et P. D'après (3.2.5) et l'appendice (IV) on en déduit :

$$\begin{aligned} V_{n+\lambda}(I) &= -\ K_{n+\lambda,1}(I)\ /\ P \\ V_{n+1-\lambda}(I) &= -\ K_{n+1-\lambda,1}(I)\ /\ P \end{aligned} \qquad (3.3.2)$$

et $$K_{n,1}(I) = (k+n)^{n-2}\ PM^n\ \frac{nk(k+1)/I+n(n-1)/J}{n!\ 2^n\ k\ I^{2n-2}\ J} \qquad (3.3.3)$$

où J = I-1.

D'après (3.2.7) et $\sigma_o = \left.\frac{d\Omega}{dI}\right|_{I=I_o}$

$$\sigma_o = 1 + \frac{3}{2}\frac{M^2}{I_o^4} + \frac{3}{2}\frac{P^2}{J_o^4} \qquad (3.3.4)$$

où I_o est la valeur de l'action sur le tore $\mathcal{C}_n^\lambda$ considéré.

Pour écrire la transformation de renormalisation simplifiée t_R, on considèrera l'expression (3.3.1) au premier ordre en M et P d'où :

$$\sigma_o = 1 + O(M^2) + O(P^2) \simeq 1$$

et d'après (3.2.7)

$$I_M = \Omega_M + O(M^2) + O(P^2) \simeq \Omega_M \tag{3.3.5}$$

et de même $I_p \simeq \Omega_p$ au ler ordre en M et P

La condition de résonance (3.2.8) nous procure :

$$\Omega_M = u_M = \frac{k}{k+n+1}$$

et $$\Omega_P = u_P = \frac{k}{k+n} \tag{3.3.6}$$

A partir de (3.3.5) et (3.3.6), la transformation t_R a donc un aspect plus simple ; elle s'écrira pour un tore $\mathcal{T}_n^\lambda$

$$M' = a_n^\lambda(k)\ P\ M^{n+\lambda}$$

$$P' = b_n^\lambda(k)\ P\ M^{n+1-\lambda}$$

$$k' = (k+n+1-\lambda)\ /\ (k+n+\lambda)$$

avec $$a_n^\lambda(k) = \frac{(k+n+\lambda)^{n+\lambda}\ (k+n+1-\lambda)^2\ [(n+1)\ (k+1) - (n+\lambda-1)]}{(n+\lambda-1)\ !\ k\ 2^{n+\lambda}\ (\frac{k}{k+n+1})^{2(n+\lambda)}\ (n+1)^2}$$

et $$b_n^\lambda(k) = \frac{(k+n+1-\lambda)^{n-\lambda+1}\ (k+n)^{2(n+1-\lambda)}\ (nk+\lambda)\ (k+n+\lambda)^2}{(n-\lambda)\ !\ 2^{n+1-\lambda}\ k^{2(n-\lambda)+3}\ n^2} \tag{3.3.7}$$

On remarque que $a_n^\lambda(k)$ et $b_n^\lambda(k)$ sont des fonctions indépendantes de M et P, ainsi t_R prend une forme monomiale très simple en M et P.

b. Recherche des points fixes.

Nous avons à présent tous les éléments nécessaires pour déterminer les points fixes hyperboliques (non triviaux) associés à la transformation de renormalisation simplifiée t_R donnée par (3.3.7). Considérons le tore $\mathcal{C}_n^\lambda$. Le point fixe F_n^λ associé est donné par $(k_n^\lambda, M_n^\lambda, P_n^\lambda)$ k_n^λ étant donné par (3.2.29). L'équation des points fixes déduite de (3.3.7) s'écrit :

$$\begin{aligned} t_R(M) = M' = M = M_n^\lambda = a_n^\lambda(k_n^\lambda)\ P\ M^{n+\lambda} \\ t_R(P) = P' = P = P_n^\lambda = b_n^\lambda(k_n^\lambda)\ P\ M^{n+1-\lambda} \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

d'où on tire :

$$M_n^\lambda = \left[\frac{1}{b_n^\lambda(k_n^\lambda)}\right]^{\frac{1}{n+1-\lambda}} \tag{3.3.9}$$

et

$$P_n^\lambda = \frac{b_n^\lambda(k_n^\lambda)}{a_n^\lambda(k_n^\lambda)}$$

où $a_n^\lambda(k)$ et $b_n^\lambda(k)$ sont donnés par (3.3.7).

Les points fixes de t_R, ne sont rien d'autre que ceux de la transformation de renormalisation complète T_R calculés au premier ordre en M et P. Dans le prochain paragraphe, nous donnerons les corrections à ces valeurs calculées au premier ordre. Nous verrons que ces corrections sont faibles d'où l'intérêt de la transformation simplifiée t_R qui permet de calculer analytiquement les points fixes de la transformation de renormalisation T_R complète. A titre d'exemple, considérons le tore dont le nombre d'onde $Q_1^1 = k_1^1 + g$ où g est le nombre d'or

$$g = 1.618033989...$$

(on verra plus tard que ce tore joue un rôle important dans la théorie). Donc $n = \lambda = 1$ et d'après (3.3.9)

$$M_1^1 = 1 \;/\; b_1^1(k_1^1)$$

$$P_1^1 = b_1^1(k_1^1) \;/\; a_1^1(k_1^1) \qquad (3.3.10$$

D'après (3.2.29) $$k_1^1 = \delta k_1^1 = g - 1 \qquad (3.3.11$$

Les fonctions $a_1^1(k)$ et $b_1^1(k)$ sont données par :

$$a_1^1(k) = [(k+2)^6\ (k+1)^2\ (k+\tfrac{1}{2})] \;/\; 8k^5$$

$$b_1^1(k) = [(k+2)^2\ (k+1)^4] \;/\; 2k^3 \qquad (3.3.12$$

d'où :

$$M_1^1 = \frac{2}{g^{11}} \simeq 1{,}00\ 10^{-2}$$

$$P_1^1 \simeq 7{,}65\ 10^{-2} \qquad (3.3.13$$

Le point fixe F_1^1 est donc donné par (k_1^1, M_1^1, P_1^1).

c. Calcul des valeurs propres et directions propres associées aux points fixes de t_R.

Pour calculer les valeurs propres et directions propres de t_R, considérons l'application tangente à t_R au point F_n^λ :

$$\delta M' = a_n^\lambda(k_n^\lambda)\ [(n+\lambda)\ PM^{n+\lambda-1}\ \delta M + M^{n+1}\ \delta P]$$

$$\delta P' = b_n^\lambda(k_n^\lambda)\ [(n+1-\lambda)\ PM^{n-\lambda}\ \delta M + M^{n+1-\lambda}\ \delta P] \qquad (3.3.14$$

qui décrit la transformation de renormalisation pour un petit écart $(\delta M, \delta P)$ au voisinage du point fixe considéré $F_n^\lambda = (k_n^\lambda, M_n^\lambda, P_n^\lambda)$

On peut écrire (3.3.14) comme suit :

$$\begin{pmatrix} \delta M' \\ \delta P' \end{pmatrix} = \bar{\bar{\mathcal{J}}}_{\mathcal{C}} \begin{pmatrix} \delta M \\ \delta P \end{pmatrix} \tag{3.3.15}$$

où $\bar{\bar{\mathcal{J}}}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} (n+\lambda)\ a_n^{\lambda}(k_n^{\lambda})\ P_n^{\lambda}\ [M_n^{\lambda}]^{n+\lambda-1} & a_n^{\lambda}(k_n^{\lambda})\ [M_n^{\lambda}]^{n+\lambda} \\ (n+1-\lambda)\ b_n^{\lambda}(k_n^{\lambda})\ P_n^{\lambda}\ [M_n^{\lambda}]^{n-\lambda} & b_n^{\lambda}(k_n^{\lambda})\ [M_n^{\lambda}]^{n+1-\lambda} \end{pmatrix}$ (3.3.16)

L'équation aux valeurs propres de $\bar{\bar{\mathcal{J}}}_{\mathcal{C}}$:

$$\det(\bar{\bar{\mathcal{J}}}_{\mathcal{C}} - \delta\bar{\bar{1}}) = 0 \text{ où } \bar{\bar{1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.3.17}$$

s'écrit aussi : $\delta^2 - \mathrm{Tr}\,\bar{\bar{\mathcal{J}}}_{\mathcal{C}}\,\delta + \det\bar{\bar{\mathcal{J}}}_{\mathcal{C}} = 0$ (a)

(où δ est la valeur propre de $\bar{\bar{\mathcal{J}}}_{\mathcal{C}}$)

avec $\mathrm{Tr}\,\bar{\bar{\mathcal{J}}}_{\mathcal{C}} = 1 + (n+\lambda)\ [b_n^{\lambda}(k_n^{\lambda})]^{\frac{2(1-\lambda)}{n+1-\lambda}}$ (b) (3.3.18)

et $\det\bar{\bar{\mathcal{J}}}_{\mathcal{C}} = (2\lambda-1)\ [b_n^{\lambda}(k_n^{\lambda})]^{\frac{2(1-\lambda)}{n+1-\lambda}}$ (c)

Les solutions de (3.3.18.a) sont :

$$\delta^{\lambda}_{n_{+,-}} = \frac{\mathrm{Tr}\,\bar{\bar{\mathcal{J}}}_{\mathcal{C}} \pm \sqrt{(\mathrm{Tr}\,\bar{\bar{\mathcal{J}}}_{\mathcal{C}})^2 - 4\det\bar{\bar{\mathcal{J}}}_{\mathcal{C}}}}{2} \tag{3.3.19}$$

$\delta^{\lambda}_{n_+}$ (resp $\delta^{\lambda}_{n_-}$) représente la valeur propre instable (resp stable) du point fixe F_n^{λ} de la transformation simplifiée t_R.

Considérons à titre d'exemple $\mathcal{C}_1^1$, dont le point fixe F_1^1 est donné par (3.3.13). D'après (3.3.18.b et c), ($n = \lambda = 1$) on a $\mathrm{Tr}\,\bar{\bar{\mathcal{J}}}_{\mathcal{C}} = 3$ et $\det\bar{\bar{\mathcal{J}}}_{\mathcal{C}} = 1$

d'où
$$\left.\begin{aligned} \delta^1_{1_+} &= \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 1 + g = g^2 = 2{,}618... \\ \delta^1_{1-} &= \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 1 - g = .38196... \end{aligned}\right\} \qquad (3.3.20)$$

où g est le nombre d'or (Cf 3.3.10).

Il nous reste à déterminer les directions propres $\vec{\ell}_+$ et $\vec{\ell}_-$ associées aux valeurs propres δ^λ_{n+} et δ^λ_{n-}. $\vec{\ell}_{+,-}$ vérifient :

$$\bar{\bar{\mathcal{R}}}\,\vec{\ell}_{+,-} = \delta^\lambda_{n+,-}\,\vec{\ell}_{+,-}. \qquad (3.3.21)$$

Pour connaître immédiatement la pente, on choisira $\vec{\ell}_{+,-} = (1,\ p_{+,-})$.
A la plus grande valeur propre (δ_+) correspond une direction instable ; à la plus petite valeur (δ_-) propre correspond une direction stable.

Dans le cas $n = \lambda = 1$ (tore nombre d'or $\mathcal{T}^1_1$).

$$p_{+,-} = \frac{b^1_1(k^1_1)}{a^1_1(k^1_1)}\,(\delta^1_{1+,-} - 2) \qquad (3.3.22)$$

avec $b^1_1(k)$ et $a^1_1(k)$ donnés par (3.3.12).

d. Détermination des variétés stables.

Après avoir décrit les points fixes F^λ_n, à présent nous sommes en mesure d'écrire les équations des variétés stables $\mathcal{S}^\lambda_n$ associées aux F^λ_n. D'après (3.3.7) l'itération de t_R donne

$$\left.\begin{aligned} M_{i+1} &= a(k_i)\ P_i\ M_i^{\,n+\lambda} \\ P_{i+1} &= b(k_i)\ P_i\ M_i^{\,n+1-\lambda} \end{aligned}\right\} \qquad (3.3.23)$$

où $a(k_i) = a^\lambda_n(k_i)$ et $b(k_i) = b^\lambda_n(k_i)$.

Soit $$\vec{X}_i = \mathrm{Log}\begin{pmatrix} M_i \\ P_i \end{pmatrix}$$

alors : $$\vec{X}_{i+1} = \vec{A}_i + \bar{\bar{\mathcal{L}}}\,\vec{X}_i \qquad (3.2.24)$$

avec $$\vec{A}_i = \vec{A}(k_i) = \mathrm{Log}\begin{pmatrix} a(k_i) \\ b(k_i) \end{pmatrix}$$

et $$\bar{\bar{\mathcal{L}}} = \begin{pmatrix} n+\lambda & 1 \\ n+1-\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

La relation (3.3.24) est la relation de base du calcul des variétés stables $\mathcal{S}_n^{\lambda}$ pour un k donné. Après L itérations de t_R on a :

$$\vec{X}_L = \bar{\bar{\mathcal{L}}}^L \vec{X}_o + \sum_{i=o}^{L-1} \bar{\bar{\mathcal{L}}}^{L-i-1} \vec{A}_i \qquad (3.2.25)$$

Le point fixe $\vec{X}^*$ vérifie en particulier :

$$\vec{X}^* = \bar{\bar{\mathcal{L}}}^L \vec{X}^* + \sum_{i=o}^{L-1} \bar{\bar{\mathcal{L}}}^{L-i-1} \vec{A}_i^* \text{ où } \vec{A}_i^* = \vec{A}(\vec{k}^*) = \vec{A}^* \qquad (3.2.26)$$

(3.3.25) et (3.3.26) impliquent :

$$\vec{X}_L - \vec{X}^* = \bar{\bar{\mathcal{L}}}^L(\vec{X}_o - \vec{X}^*) + \sum_{i=o}^{L-1} \bar{\bar{\mathcal{L}}}^{L-i-1}(\vec{A}_i - \vec{A}^*) \qquad (3.3.27)$$

Décomposons les vecteurs, suivant les directions propres $\vec{Z}_{\pm}$ de $\bar{\bar{\mathcal{L}}}$.

$$\left.\begin{aligned} \vec{X}_i &= \vec{X}^* + x_i \vec{Z}_+ + y_i \vec{Z}_- \\ \vec{A}_i &= \vec{A}^* + \zeta_i \vec{Z}_+ + \eta_i \vec{Z}_- \end{aligned}\right\} \qquad (3.3.28)$$

Soient ρ_+ et ρ_- les valeurs propres de $\bar{\bar{\mathcal{L}}}$. En utilisant (3.3.27) et (3.3.28) on obtient :

$$x_L = \rho_+^L x_o + \sum_{i=o}^{L-1} \rho_+^{L-i+1} \zeta_i$$

$$y_L = \rho_-^L y_o + \sum_{i=o}^{L-1} \rho_-^{L-i+1} \eta_i \qquad (3.3.29)$$

Soit $$\Sigma_{\pm}^{(L)} = \sum_{i=1}^{L-1} \rho_{\pm}^{L-i+1} \left| \begin{matrix} \zeta_i(+) \\ \eta_i(-) \end{matrix} \right. \qquad (3.3.30)$$

Etudions $\Sigma_{\pm}^{(L)}$:

1er cas $\Sigma_+^{(L)}$: $\zeta_i(k_i)$ tend vers 0 comme μ^i où μ est la pente de

$$k' = \frac{k+n}{k+n+1} \quad (\lambda = 1)$$

soit :

$$\mu = \frac{1}{(k+n+1)^2}$$

d'après (3.3.20) : $$\Sigma_+^{(L)} = \rho_+^L \Sigma_+^{'L} \qquad (3.3.31)$$

avec $$\Sigma_+^{'(L)} = \sum_{i=o}^{L-1} \rho_+^{-(i+1)} \zeta_i$$ qui vérifie la relation

de récurrence : $$\Sigma_+^{'(L+1)} = \Sigma_+^{'(L)} + \rho_+^{-(L+1)} \zeta_L$$

Comme $\Sigma_+^{'(L)}$ converge vers $\Sigma_+^{'\infty}$, on a la relation :

$$\Sigma_+^{'(L)} = \Sigma_+^{'\infty} + O(\zeta_{L-1} \rho_+^{-L})$$

et

$$\Sigma_+^{(L)} = \rho_+^L \Sigma_+^{'\infty} + O(\zeta_{L-1}) \qquad (3.3.32)$$

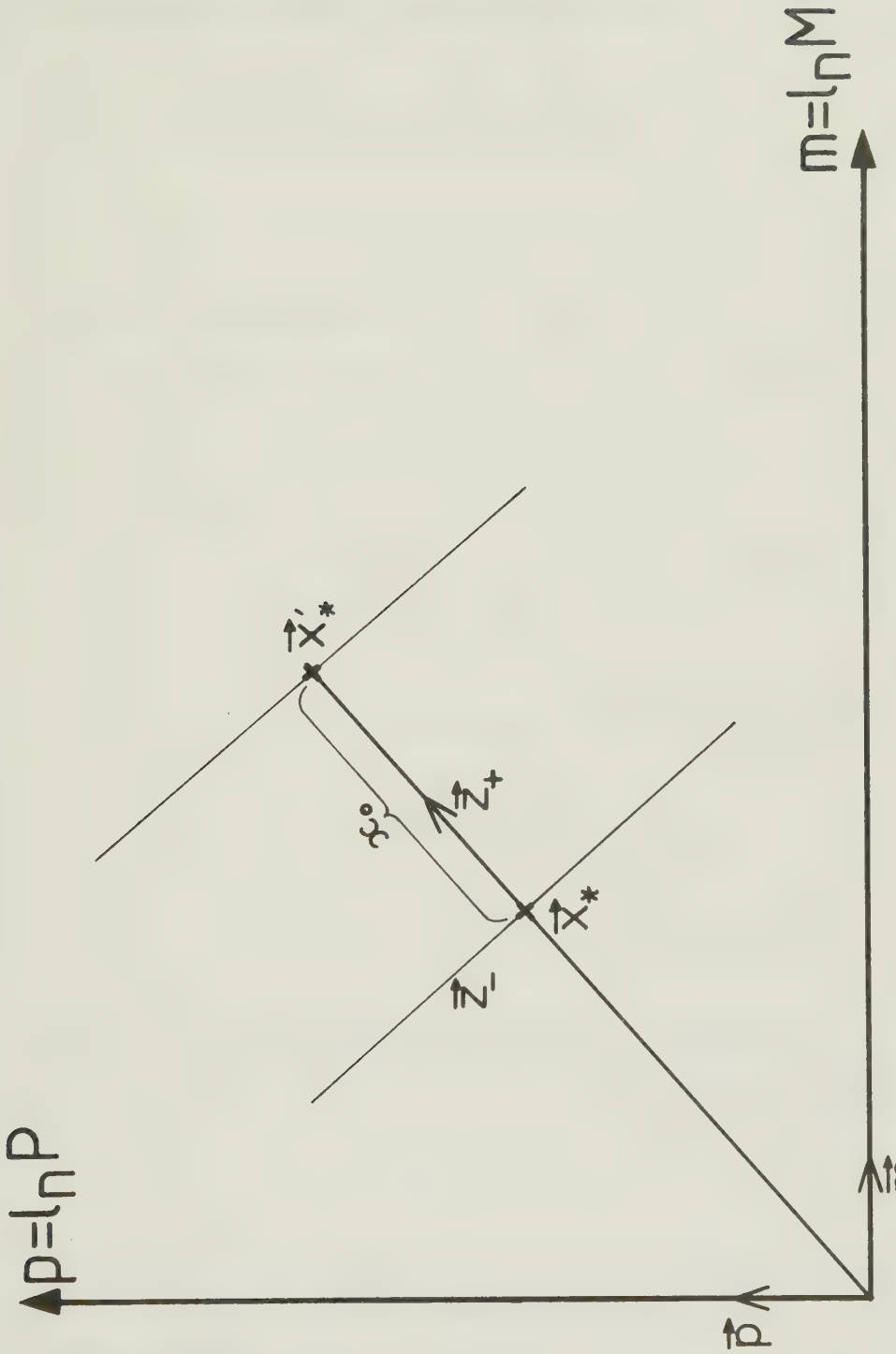


Fig. 3.4 : Variété stable dans le repère logarithmique (ℓn M, ℓn P).

2ème cas $\Sigma_-^{(L)}$: η_i tend aussi vers zéro comme μ_i : $\eta_i = O(\mu_i)$

d'après (3.3.30) on a : $\Sigma_-^{(L)} = \rho_+^L \Sigma_-'^{(L)}$

avec $$\Sigma_-'^{(L)} = \sum_{i=o}^{L-1} \rho_-^{-(i+1)} \eta_i \text{ qui converge tel que :}$$

$$\Sigma_-'^{(L)} \underset{L\to\infty}{\to} \Sigma_-'^{\infty}$$

Vu que $\rho_-^L \to 0$ quand $L \to \infty$ alors $\Sigma_-^{(L)} \to 0$ aussi.

quand $L \to \infty$ (3.3.33)

(3.3.29), (3.3.30) et (3.3.31) impliquent :

$$\begin{aligned} x_L &= \rho_+^L (x_o + \Sigma_+'^{\infty}) + O(\mu^{L-1}) \\ y_L &= \rho_-^L y_o + O(\rho_-^L) \end{aligned} \qquad (3.3.34)$$

Pour déterminer la variété stable, on veut que (M_L, P_L) tende vers le point fixe F_n^λ d'où

$$x_o = - \Sigma_+'^{\infty} \qquad (3.3.35)$$

L'équation de la variété stable dans le repère logarithmique $(\vec{Z}_+, \vec{Z}_-)$ est donnée par (3.3.35). C'est donc une droite parallèle à $\vec{Z}_-$ (voir Fig. 3.6). Soit α la pente de $\vec{Z}_-$. L'équation de cette droite dans le repère $(\vec{m}, \vec{p})$ est :

$$\alpha(m-m_*') + p - p_*' = 0 \qquad (3.3.36)$$

où $(m_*', p_*') = \vec{X}_*'$.

Si on passe au plan (M, P) l'équation de la variété stable est

$$P\, M^{\alpha} = \text{cste}$$

Nous utiliserons en fait la forme suivante :

$$P^{\frac{1}{\alpha}} M = \text{Cste} = R(k) \tag{3.3.37}$$

R(k) est calculé en principe à partir de (3.3.35). L'évaluation de la série est assez complexe, aussi avons-nous préféré entreprendre ce calcul numériquement.

Dans le cas $n = \lambda = 1$

$$\overline{\overline{\mathcal{L}}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ d'où } \rho_{+,-} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

et $$\vec{Z}_{+,-} = (1,\ P_{+,-}) \text{ avec } p_{-} = \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \tag{3.3.38}$$

La variété stable est donc décrite par

$$P^{\frac{1}{\alpha}} M = R(k) \tag{3.3.39}$$

avec α donné par (3.3.38) et R(k) est une fonction dépendant seulement de k. R(k) vérifie une relation de récurrence sur k que l'on peut déduire en écrivant :

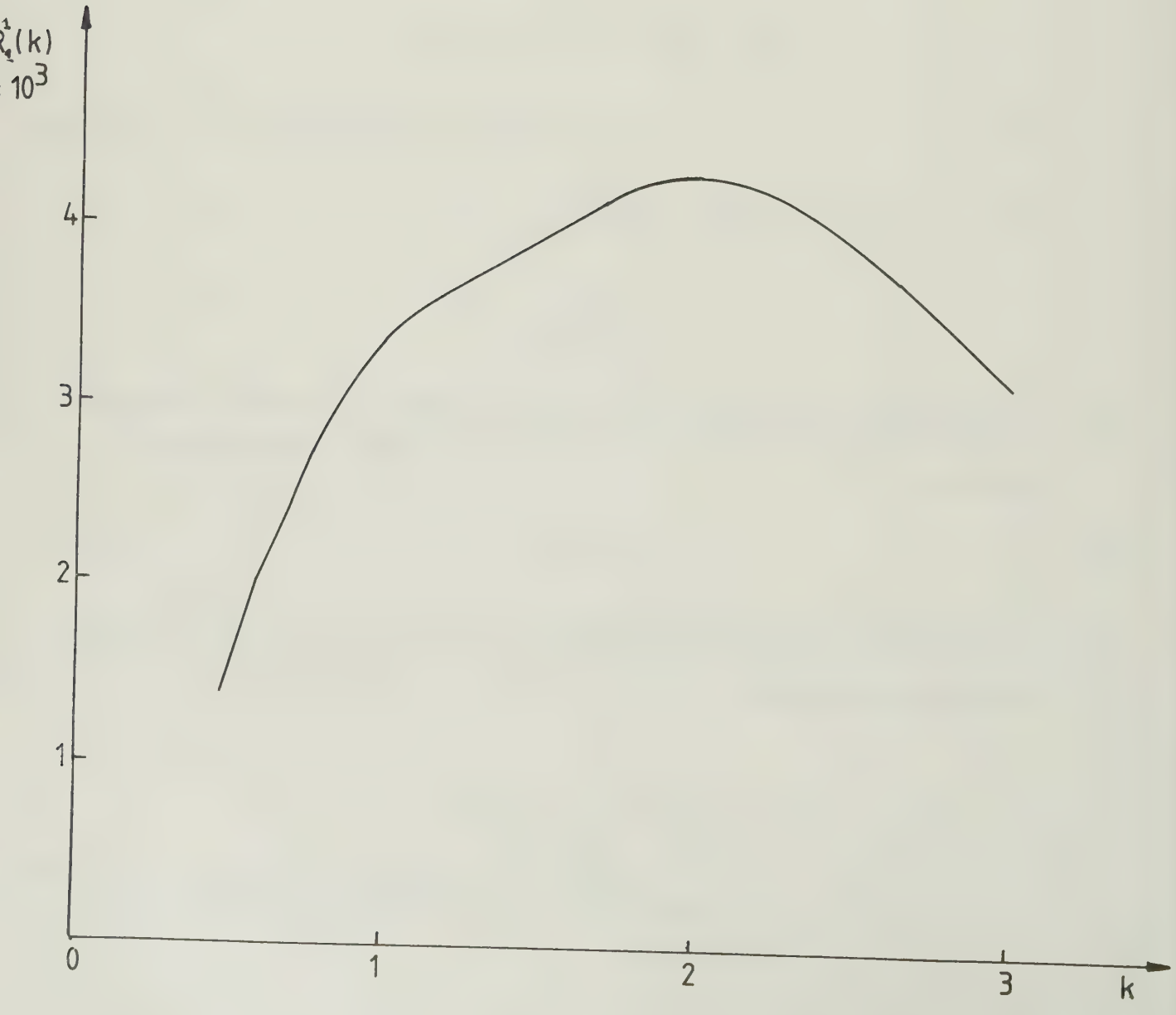
$$P'^{\frac{1}{\alpha}} M' = R(k')$$

(où M', P' et k' sont les transformés de (M, P, k) par t_T) et en utilisant (3.3.8), il vient :

$$\frac{R(k')^{\alpha/(2\alpha+1)}}{(a(k))^{\alpha/(2\alpha+1)}\ [b(k)]^{1/(2\alpha+1)}} = R(k) \tag{3.3.40}$$

Tableau II : Tableau des valeurs de R(k).

k	R(k) (10^{-3})
0.5	1.47
0.6	1.98
0.618	2.03
0.625	2.06
0.666	2.24
0.75	2.7
1	3.32
2	4.24
3	3.07



Courbe calculée numéri

Nous avons numériquement calculé $R_1^1(k)$ et nous l'avons tabulé (voir tableau II)* pour quelques valeurs de k. La relation de récurrence (3.3.40) nous procure une suite discrète de valeurs de R(k).

A partir de la transformation de renormalisation t_R on a pu déterminer analytiquement les points fixes de cette transformation, ainsi que les valeurs propres et directions propres associées. Les variétés stables $\mathcal{S}_n^\lambda$ dont le rôle majeur est de constituer une frontière de stabilité du tore $\mathcal{C}_n^\lambda$ (Cf 3.2.c), peuvent être déterminées analytiquement, nous avons donné notamment l'expression de $\mathcal{S}_1^1$ qui comme on le montrera plus tard joue un rôle prépondérant en ce qui concerne le calcul des seuils de S.G.E. Nous allons à présent calculer les corrections aux résultats simplifiés obtenus dans ce paragraphe quand la transformation complète T_R est considérée.

4. CORRECTIONS AUX RESULTATS SIMPLIFIES.

a. Correction aux points fixes.

Pour écrire l'expression de la transformation de renormalisation simplifiée nous avons fait un développement au ler ordre en M et P (Cf. 3.3.5) de T_R (la transformation de renormalisation complète). Si on considère l'ordre supérieur (voir calcul de l'Appendice V) les corrections apportées aux valeurs simplifiées des points fixes (calcul au ler ordre), sont très faibles. Dans le cas de F_1^1, cette correction est de l'ordre de 10^{-4}, sachant que F_1^1 simplifié est ($M_1^1 \sim 10^{-2}$; $P_1^1 \sim 7.65\ 10^{-2}$). Pour le calcul des points fixes, une bonne estimation peut être obtenue seulement à partir de l'étude de la transformation simplifiée t_R toute seule.

b. Correction aux valeurs propres.

Nous avons calculé explicitement la correction à la valeur propre instable pour le point fixe F_1^1 associé au tore $\mathcal{C}_1^1$. Nous avons trouvé pour cette valeur au ler ordre (Cf. 3.3.20) :

* et la courbe ci-après.

$$\delta_1^1 \Big|_{\text{1er ordre}} = g^2 = 2{,}618...$$

On obtient (voir appendice V) une correction positive à cette valeur donnée par :

$$\beta = \delta_1^1 \Big|_{\text{2ème ordre}} - g^2 = 0{,}129 \qquad (3.4.1)$$

MacKay [21] a obtenu numériquement une correction

$$\beta = 0{,}0321873...$$

Malgré les approximations faites pour définir T_R, on retrouve le signe de cette correction et l'ordre de grandeur en accord avec les résultats numériques. δ_1^1 est bien estimée car β est petit.

c. Variétés stable $\mathcal{S}_n^\lambda$.

On a vu dans le paragraphe (3.3.6) que l'équation de $\mathcal{S}_n^\lambda$ dans le plan (M, P) dans le cas de la transformation de renormalisation simplifiée est

$$P^{1/\alpha} M = R(k) \qquad (3.4.2)$$

où α est la pente stable du vecteur propre de $\bar{\bar{\mathcal{L}}}$ (Cf. 3.3.24)

Dans le cas $n = \lambda = 1$, $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (voir 3.3.38).

Les calculs numériques réalisés sur la transformation complète T_R nous suggèrent de considérer une correction en P^2 à (3.4.2). Nous proposons donc, sur cette base, pour l'équation de $\mathcal{S}_n^\lambda$ pour T_R complète :

$$P^{\frac{1}{\alpha}} M(1 + c(k)\ P^2) = R(k) \qquad (3.4.3)$$

où R(k) est la même constante intervenant dans le membre droit de l'équation (3.4.2) (cas de t_R simplifiée) et c(k) est donné en annexe (voir appendice VI) pour le cas $n = \lambda = 1$ correspondant à $\mathcal{J}_1^1$. Un excellent accord entre les courbes $\mathcal{J}_n^\lambda$ calculées numériquement à partir de la transformation complète T_R et les courbes $\mathcal{J}_n^\lambda$ données par (3.4.3) a été obtenu. Par ce biais nous avons donc une expression complètement analytique des $\mathcal{J}_n^\lambda$.

d. Hiérarchie des points fixes de T_R.

Ayant obtenu les expression analytiques des points fixes et des variétés stables (3.3.9) et (3.4.3), nous avons constaté le résultat suivant : le point fixe F_1^1 est au-dessus des $\mathcal{J}_n^\lambda(\forall n, \forall\lambda)$. D'autre part, les points fixes F_n^λ associés aux tores $\mathcal{T}_n^\lambda$ de nombre d'onde $Q = k + n + \delta k_n^\lambda$ sont en dessous de $\mathcal{J}_1^1$. Ceci nous amène à la conclusion que les tores dits nobles [22], c'est à dire dont le nombre d'onde $Q = k + n + \delta k$ est tel que le développement de δk en fraction continue est $\delta k = [m_1, \ldots, m_j, 1, 1, 1, \ldots] = [\underline{m}, (1,)^\infty]$ où $\underline{m}$ désigne une suite de nombres entiers), sont les plus robustes. Le plus noble d'entre eux est $\mathcal{T}_1^1$ dont $\delta k_1^1 = [(1,)^\infty] = g - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Ce qui nous conduit donc à suspecter le tore $\mathcal{T}_1^1$ d'être le dernier à disparaître, $\mathcal{J}_1^1$ nous renseignant directement sur le seuil de stochasticité grande échelle pour le système considéré.

La robustesse des tores nobles a été montrée numériquement par Mac Kay [21].

Considérons n'importe quel tore $\mathcal{T}_o$ dont le nombre d'onde $Q_o = k + n_o + \delta k_o$ où δk_o est irrationnel. A partir d'un certain nombre L d'itérations de T_R, le développement en fraction continue de δk_o sera $\delta k_o = [\underline{a}, \underline{b}]$ où $\underline{a}$ est une suite de nombres entiers et $\underline{b}$ est le développement en fraction continue de $\delta k^{(L)} = \delta k_n^\lambda$ avec δk_n^λ donné par (3.3.28). Dans ce cas l'évolution ultérieure est régie par le point fixe F_n^λ. Le point représentatif (M_L, P_L) appartient alors à $\mathcal{J}_n^\lambda$ et tend vers le point fixe quand on itère la transformation T_R.

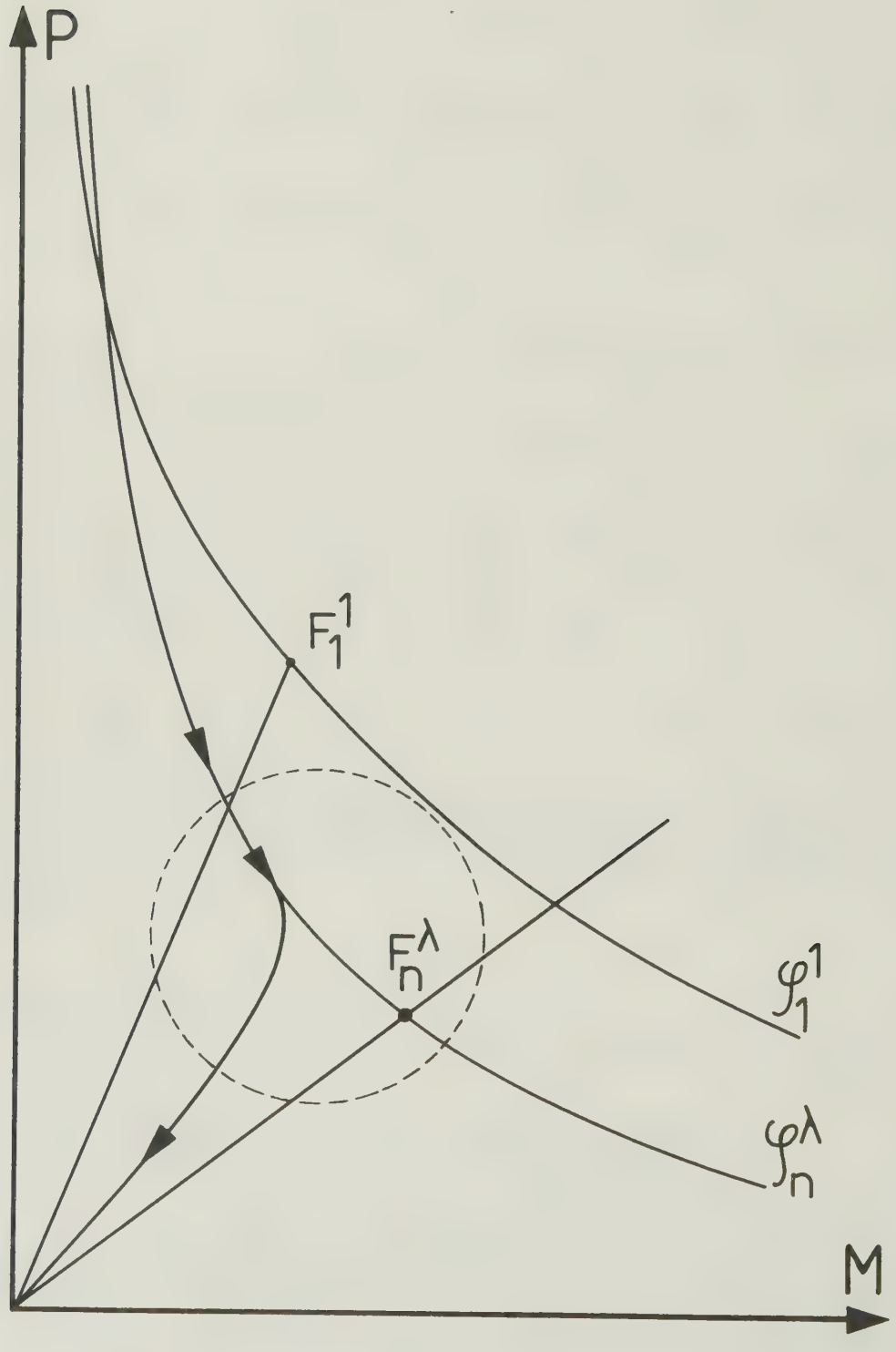


Fig. 3.7 : Hiérarchie des points fixes F_n^λ.

Le fait que le point fixe F_n^λ soit en dessous de $\mathcal{S}_1^1$ implique que si, après $L' \geq L$ itérations de T_R, on remplace $\delta k^{(L')}$ par le développement de δk_1^1 relatif au tore noble $\mathcal{C}_1^1$, alors $(M_{L'}, P_{L'})$ est sous $\mathcal{S}_1^1$ et la convergence vers zéro est rapide (voir Fig. 3.7). Le tore ayant ce développement sera plus stable. On peut montrer qu'effectivement si un tore non noble se déstabilise on peut toujours trouver un tore noble dans son voisinage. Etant donné que T_R est approchée, cette preuve difficile à construire ne prouverait rien mathématiquement. Pour le physicien, il est suffisant de se limiter au résultat que le tore $\mathcal{C}_1^1$ joue le rôle dominant et par suite la variété stable $\mathcal{S}_1^1$ associée au point fixe F_1^1 de ce tore nous renseignera sur le seuil de S.G.E du système.

5. SEUIL DE STOCHASTICITE GRANDE ECHELLE.

Pour pouvoir rattacher les résultats à des travaux antérieurs [3, 14, 15, 19], on caractérisera le hamiltonien paradigme H (Cf 3.1.19) par k, $\rho = (\frac{M}{P})^{\frac{1}{2}}$ et $s = 2\sqrt{M} + 2\sqrt{P}$ au lieu de (K, M, P).

Vu les résultats du paragraphe (3.4.d) les derniers tores à disparaître sont les tores nobles. La variété stable $\mathcal{S}_1^1$ et ses préimages Σ_n par la transformation T_R nous renseignent donc sur le seuil de stochasticité grande échelle. Σ_n est définie par :

$$\vec{X} = (k,M,P) \in \Sigma_n \iff T_R(\delta k_1^1, n, \vec{X}) \in \mathcal{S}_1^1, \qquad (3.5.1)$$

dans le cas n = 1, $\vec{X} \in \mathcal{S}_1^1 = \Sigma_1^1$).

Il suffira d'utiliser n = 1,2, ou 3 généralement pour calculer le seuil $s_1(k_o,\rho)$ pour l'hamiltonien $H(k,\rho,s_1)$.

Soit H_e le hamiltonien donné par (3.1.19) avec les paramètres $(\frac{1}{k},P,M)$. Les hamiltoniens H et H_e sont équivalents du point de vue de la dynamique. Les tores $\mathcal{C}_n^\lambda$ du système caractérisé par le hamiltonien H avec n = 0 correspondent aux tores $\mathcal{C}_{n'}^{\lambda'}$ de H_e avec $n' \geq 1$. On peut définir

+ prévision numérique

● prévision analytique au moyen de T_R

——— prévision de E.D.

----- prévision du critère de recouvrement des résonances (CHIRIKOV)

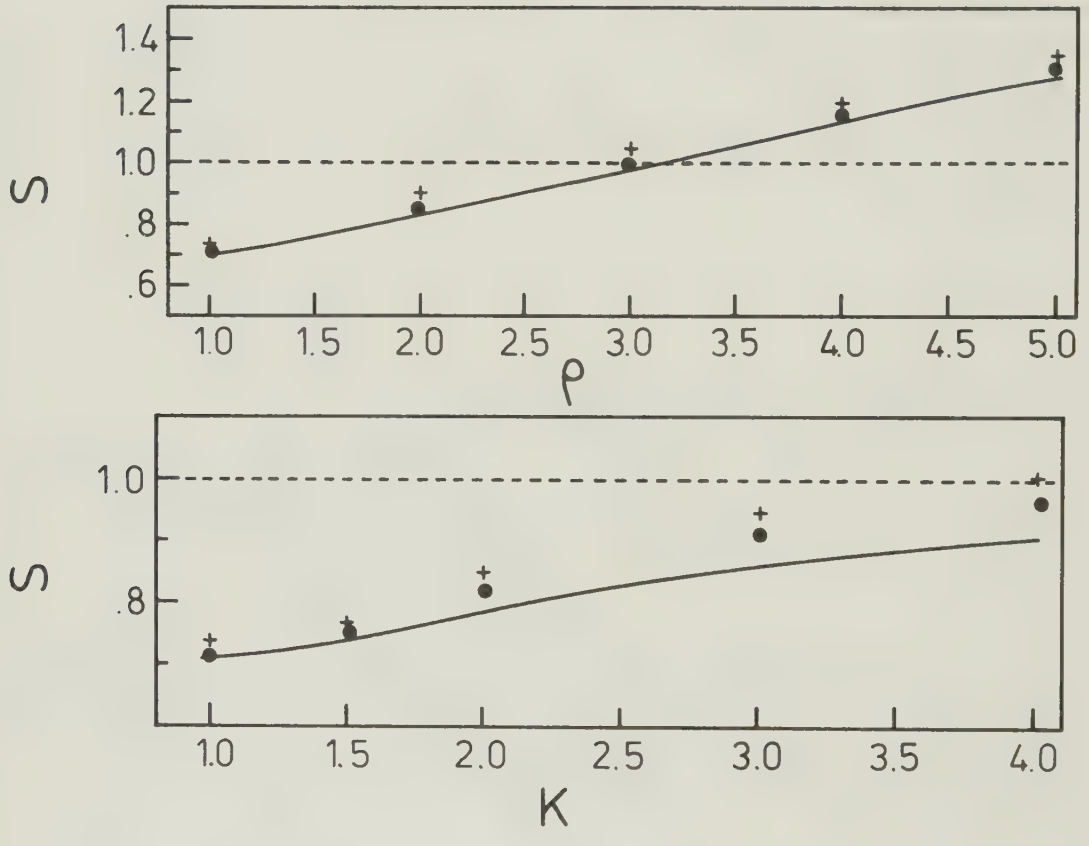


Fig. 3.8 : Seuils de stochasticité pour :

a) $k = 1$, $\rho = \sqrt{\frac{M}{P}}$ (variable)

b) $\rho = \sqrt{\frac{M}{P}} = 1$, k variable.

pour H_e un seuil $s_2(k,\rho)$ comme nous l'avons fait ci-dessus pour H. Notons que le hamiltonien H_e (resp. H) décrit le système au-dessus (resp. en dessous) de la pondéromotrice.* Soit $s(k,\rho) = \max [s_1(k,\rho), s_2(k,\rho)]$. La fonction $s(k,\rho)$ définit l'enveloppe supérieure des Σ_n relatifs à H et H_e. Pour $s < s(k,\rho)$ il y a au moins un tore préservé entre les résonances M et P. Ainsi $s(k,\rho)$ est un minorant du vrai seuil de stochasticité.

Les prévisions théoriques peuvent être comparées avec les résultats de l'intégration numérique directe des équations canoniques du hamiltonien (3.1.19). Sur les figures (3.8 a et b) les croix donnent les valeurs $s_{\mathcal{C}}$ pour lesquelles on a pu observer numériquement qu'une trajectoire initialement située dans la couche stochastique de la résonance M a abouti dans la couche stochastique de la résonance P au bout d'un temps $t \leq \mathcal{C}$ (sur la Figure 3.8, $\mathcal{C} = 18400\ \pi/k$). $s_{\mathcal{C}}$ donne une limite supérieure du vrai seuil s. Sur la figure (3.8) la hauteur des croix donne la taille de l'indétermination numérique sur s , et les prévisions de la théorie de renormalisation développée précédemment (Cf : 3.1 à 3.4) sont données par les ronds pleins, les droites pointillées s = 1 correspondent au seuil de recouvrement des résonances (CHIRIKOV) tandis que les courbes continues donnent les prévisions de la théorie E.D. Pour k > 2, on a exhibé un tore qui n'appartient pas à la classe des $\mathcal{C}_n^1$ et dont la destruction est après celle des $\mathcal{C}_n^1$. On constate que les seuils donnés par la présente théorie se rapprochent plus des résultats numériques que à ceux obtenus par la renormalisation E.D.

* C'est-à-dire la résonance R_1 (terme classique en physique des plasmas).

6. DISCUSSION.

Nous avons construit un groupe de renormalisation qui nous a permis de déduire un certain nombre de propriétés universelles et non universelles (calcul de seuils de stochasticité). Un très bon accord avec les calculs numériques a été obtenu. La transformation de renormalisation T_R à partir de laquelle, toutes ces propriétés ont été établies est approchée, nous avons en effet, dû faire quelques approximations. Nous allons discuter dans ce qui suivra de la validité de ces approximations. Nous allons aussi comparer l'ancienne version de la transformation de renormalisation E.D. et la nouvelle version de la transformation de renormalisation T_R développée dans les paragraphes précédents.

a. Comparaison de la transformation de renormalisation E.D. et de T_R.

Pour définir E.D. à partir de :

$$H(v,x,t) = \frac{1}{2} v^2 - M \cos x - P \cos k(x-t) \qquad (3.6.1)$$

La première étape consiste à passer dans de nouvelles coordonnées (I,θ) appelées coordonnées "action-angle". Dans ces coordonnées le hamiltonien s'écrit :

$$H'(I,\theta,t) = H_o(I) - P \sum_{n=-\infty}^{+\infty} V_n(I) \cos[(k+n)\theta - kt] \qquad (3.6.2)$$

où les coefficients $V_n(I)$ sont donnés dans la réf. [3]. On montre [14] que cette transformation revient à faire une transformation de KOLMOGOROV simple qui supprimerait la résonance M dans la limite M/V^2 tendant vers O.

Dans cette ancienne version, le cas où P est grand était mal considéré, car on négligeait l'influence de la grosse résonance représentée par P sur une résonance secondaire. On tenait compte seulement de la résonance M. Or, justement, le point fixe F_1^1 associé à $\mathcal{C}_1^1$ est dans ce cas là (point fixe important). Dans la nouvelle version, la transformation de KOLMOGOROV supprime les deux résonances et tient ainsi compte à l'ordre le plus bas de la perturbation des deux résonances primaires, elle devrait donc mieux traiter le problème. C'est la raison principale qui nous a conduit à utiliser la transformation de KOLMOGOROV double. Cependant en remplaçant dans l'ancienne version E.D. de la transformation de renormalisation, la transformation "Action-Angle" par la transformation de KOLMOGOROV nous avons obtenu des seuils trop bas. Il était donc nécessaire de faire intervenir l'approximation de résonance centrée (A.R.C.) ; en la combinant avec la transformation de KOLMOGOROV double nous avons obtenu des seuils en excellent accord avec les prévisions numériques.

Nous avons aussi injecté la nouvelle approximation (A.R.C.) après avoir effectué la transformation d'action angle sur (3.6.1). Les résultats obtenus ne diffèrent pratiquement pas de ceux obtenus par la méthode original E.D. où l'A.R.C. ne figurait pas.

La transformation "action-angle" cachait conceptuellement que l'A.T.F.P. n'était pas la bonne approximation car les coefficients V_n dépendent trop peu de l'action pour que cela se fasse sentir. Ceci est dû au fait que $V_n(I_n) \simeq V_n(I_o)$.

C'est la "transformation de KOLMOGOROV double" combinée avec l'A.R.C. qui donne la meilleure version de la renormalisation approchée. Toutefois nous notons que la transformation de KOLMOGOROV "double" présente un inconvénient en ce qui concerne la description des couches stochastiques. En effet quand on s'approche trop près des résonances, cette transformation fait apparaître des divergences dues aux petits dénominateurs. Cela ne joue pas pour le calcul des seuils de stochasticité de grande échelle car les tores les plus robustes sont loin des deux résonances primaires. La description des courbes stochastiques se fait par la méthode analytique développée par D.F. ESCANDE [23].

Du point de vue des propriétés universelles, la hiérarchie des points fixes obtenue pour T_R, avec sa conséquence sur le rôle primordial de $\mathcal{C}_1^1$ pour le calcul des seuils, n'existait pas dans la version E.D. qui utilisait la transformation "action-angle" (en désaccord avec le calcul numérique).

Enfin en ce qui concerne les seuils, dans la nouvelle version de la transformation de renormalisation nous avons obtenu un meilleur accord entre les calculs numériques et les seuils analytiques (voir Figures 3.8 a et b).

b. Validité des approximations réalisées pour définir T_R.

i) Test de la non linéarité de la partie intégrable du hamiltonien.

Dans la première étape de la renormalisation qui consistait dans le passage d'un hamiltonien général $\mathcal{H} = \mathcal{H}_o + \varepsilon V$ au hamiltonien paradigme (3.6.1) ; nous avons fait l'hypothèse que $\mathcal{H}_o(I)$ est suffisamment non linéaire, nous allons donner une condition qui exprime ce minimum de non linéarité demandé à $\mathcal{H}_o(I)$. D'après (3.1.1) et (3.1.2)

$$\mathcal{H}(\bar{I},\bar{\theta}) = \mathcal{H}_o(\bar{I}) + \varepsilon \sum_{i\in J} V_i(\bar{I}) \cos(\bar{p}_i.\theta) \qquad (3.6.3)$$

Retenons dans la sommation, les termes (i = m,p) qui correspondent aux deux résonances proches du tore que l'on considère et supprimons les par une transformation de KOLMOGOROV (Cf : 2.26). Ceci rajoute à $\mathcal{H}_o(\bar{I})$ un terme d'ordre ε^2 qui est indépendant de $\bar{\theta}$.

Recalculons le paramètre a défini en (3.1.10). Il est alors changé par une quantité $\varepsilon^2\Delta a$. Si, pour ε égal au seuil de stochasticité on a la condition :

$$\varepsilon^2 \left|\frac{\Delta a}{a}\right| << 1 \qquad (3.6.4)$$

alors la courbure de la courbe d'énergie de la Fig. 3.1 varie d'une quantité négligeable du fait de la présence des résonances m et p. Dans ce cas, le seuil calculé a la bonne valeur. Dans le cas opposé, $\mathcal{H}_o$ est faiblement non linéaire. On opèrera alors une transformation de Kolmogorov qui supprime toutes les résonances de $\mathcal{H}$ donné par (3.6.3). Cela rajoutera une contribution en ε^2 à la non linéarité de $\mathcal{H}_o$ et augmentera le nombre de directions $\bar{\omega}_i$ dans le nouvel hamiltonien. On pourra ensuite utiliser la méthode décrite au paragraphe (2.1) [24].

ii) Approximation de la courbe d'énergie localement par une parabole.

On aimerait connaître la contribution à $\mathcal{H}_o$ qui proviendrait d'un développement de $\mathcal{H}_o$ au 3ème ordre en I au voisinage du tore d'action I_o au lieu de limiter ce développement au second ordre comme nous l'avons fait en (3.2.10). Le hamiltonien s'écrira alors :

$$\mathcal{H}(I,\theta,t) = \mathcal{H}_o(I_o) + \Omega_o(I-I_o) + \frac{\sigma_o}{2}(I-I_o)^2 + \frac{\mu_o}{6}(I-I_o)^3$$

$$- P \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} V_\ell(I) \cos[(k+\ell)\,\theta - kt] \qquad (3.6.5)$$

Opérons la transformation de Kolmogorov qui supprime toutes les résonances d'ordre P, dont la fonction génératrice est :

$$F(J,\theta,t) = J\theta + \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \frac{V_\ell \sin \varphi_\ell}{D_\ell} \tag{3.6.6}$$

où $\varphi_\ell = (k+\ell)\ \theta(\theta',t) - kt$

$D_\ell = (k+\ell)\ (\Omega_o+\sigma_o J+\mu_o J^3)$ et $k_\ell = k + \ell$ (J et θ' sont les nouvelles coordonnées action angle). On obtient alors le nouveau hamiltonien :

$$\mathcal{H}'(J,\theta',t) = \Omega_o J + \frac{1}{2}\sigma_o J^2 + \frac{1}{6}\mu_o J^3 + \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \cos^o \varphi_\ell \frac{V_\ell^2 k_\ell^2}{2D_\ell^2}(\sigma_o+\mu_o J)$$

$$+ \sum_{\substack{\ell=-\infty \\ m\neq\ell}}^{+\infty} \cos\varphi_\ell \cos\varphi_m V_\ell V_m k_\ell k_m \left(\frac{\sigma_o+\mu_o J}{2D_\ell D_m}\right) + \frac{\mu_o}{6}\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \frac{\cos^3\varphi_\ell V_\ell^3 k_\ell^3}{D_\ell^3}$$

$$+ \frac{\mu_o}{2}\sum_{\substack{\ell\neq m \\ \ell=-\infty}}^{+\infty} \frac{V_\ell^2 V_m k_\ell^2 k_m \cos^2\varphi_\ell \cos\varphi_m}{D_\ell^2 D_m} \tag{3.6.7}$$

On négligera l'influence du terme cubique en I dans (3.6.5) si le terme linéaire en J dépendant de μ_o provenant de la 1ère sommation de (3.6.7) est petit devant le terme linéaire en J indépendant de μ_o provenant de la même série. Ceci se traduit par :

$$\forall \ell,\ \ell\in\mathbb{N},\ \text{alors}\ \frac{\mu_o}{2}\ \frac{\left|\mathcal{V}_{\varphi_\ell} - \Omega_o\right|}{\sigma_o} \ll \sigma_o \tag{3.6.8}$$

où $\mathcal{V}_\varphi = \frac{k}{k+\ell}$; $\left|\mathcal{V}_\varphi - \Omega_o\right|$ variant très peu, alors (3.6.8) s'écrit $|\mu_o| \ll \sigma_o^2$.

$\mu_o = \left.\frac{d^2\Omega}{dI^2}\right|_{I=I_o}$ où $\Omega(I)$ est donné par (3.2.7) et σ_o est donné par $\frac{d\Omega}{dI}$.

$$\sigma_o = 1 + \frac{3}{2}\frac{M^2}{I_o^4} + \frac{3}{2}\frac{P^2}{6(I_o-1)^4}$$

$$\mu_o = -\frac{6M^2}{I_o^5} - \frac{6P^2}{(I_o-1)^5}$$

La relation (3.6.8) peut être traduite en termes de M et P.

$$\left|\frac{6M^2}{I_o^5} + \frac{6P^2}{(I_o-1)^5}\right| << \left(1 + \frac{3}{2}\frac{M^2}{I_o^4} + \frac{3}{2}\frac{P^2}{(I_o-1)^4}\right)^2 \qquad (3.6.9)$$

Cette relation est toujours vérifiée pour le domaine en M et P qui nous intéresse (M est typiquement de l'ordre de 10^{-2} et P du même ordre de grandeur ; dans la région médiane $I_o \simeq .5$).

Ainsi nous justifions l'approximation de la courbe d'énergie par sa parabole osculatrice en I_o, action du tore considéré.

iii) Au-delà de l'approximation à 2 résonances.

Cette approximation a été introduite pour la première fois par CHIRIKOV [19]. Dans le développement (3.1.5) nous avions retenu que les deux résonances les plus proches du tore considéré, négligeant ainsi l'influence des plus loitaines sur la stabilité du tore. Nous pouvons éviter l'usage "abrupt " de cette approximation en opérant tout d'abord une transformation de Kolmogorov qui supprime toutes les résonances d'ordre ε du hamiltonien $\mathcal{H}$ donné par (3.6.3). La fonction génératrice de cette transformation est :

$$F(J,\theta_1,\theta_2) = J\,\theta_1 + \varepsilon \sum_{i\in J} \frac{V_i \sin\varphi_i}{k_i\Omega - \omega_i} \qquad (3.6.10)$$

où $\Omega = \frac{\partial \mathcal{H}_o}{\partial I}$ $\quad k_i = p_{1_i}$ $\quad \omega_i = -p_{2_i}$ $\quad \varphi_i = \bar{p}_i.\bar{\theta}_i$.

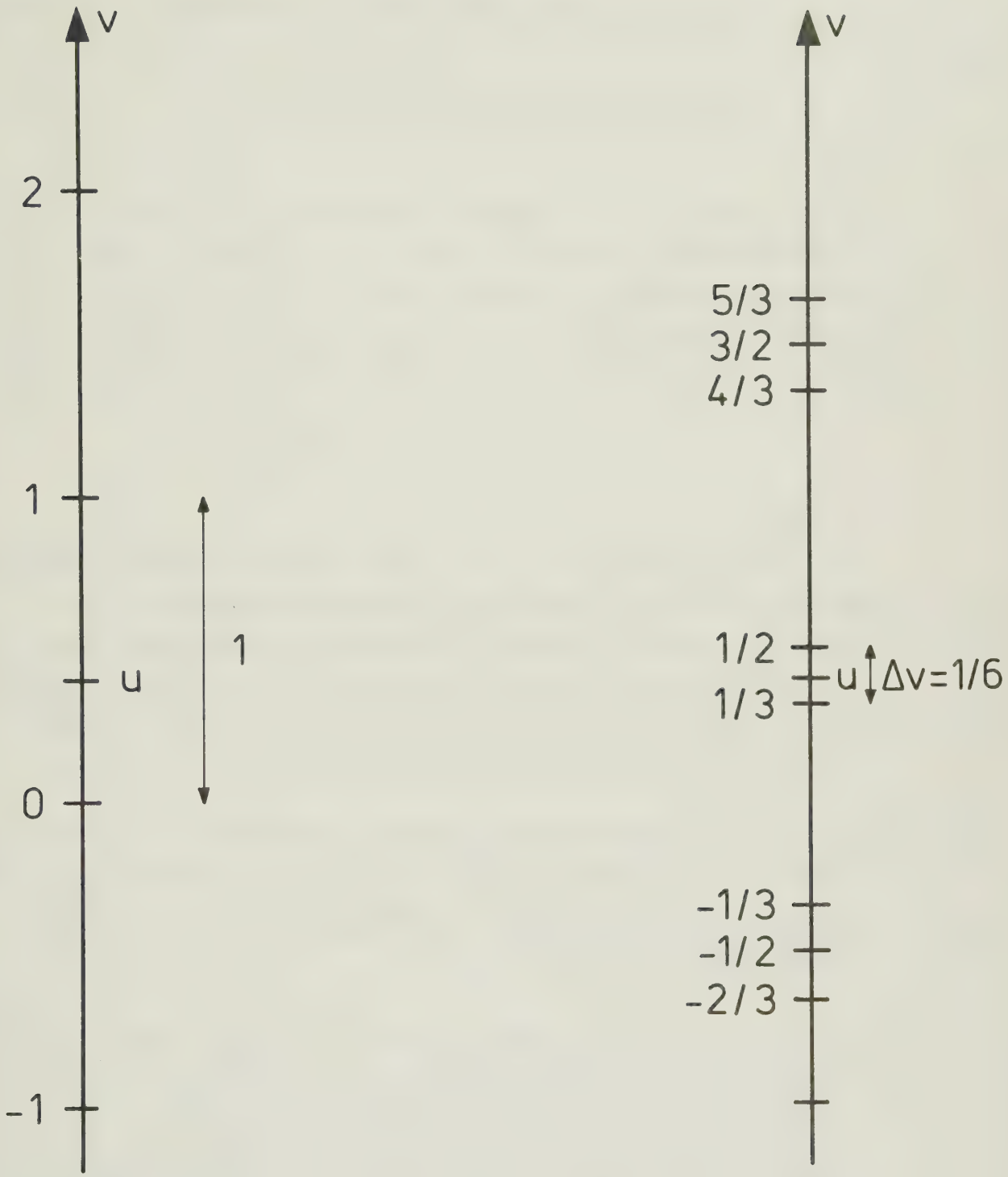


Fig. 3.9 : Représentation sur l'échelle des vitesses des résonances

(a) de l'hamiltonien H (b) de l'hamiltonien transformé par Kolmogorov.

Pour illustrer cette méthode, considérons le hamiltonien

$$H^{(S)}(v,x,t) = \frac{1}{2} v^2 - M \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos (x-nt) \qquad (3.6.11$$

qui correspond [11] à l'application standard. Sur la figure (3.9 .a) nous avons représenté l'axe des vitesse v et reporté dessus les vitesses des termes résonnants (vitesses entières $n \in Z$) et la vitesse u du tore nombre d'or dont on sait (Cf. 3.4) qu'il joue un rôle important dans la théorie. Quand on fait la transformation canonique de fonction génératrice

$$F(Z,x,t) = Ix + M \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin (x-nt)}{I - n} \qquad (3.6.12$$

à $H^{(S)}(v,x,t)$ on obtient un hamiltonien dont les résonances primaires d'amplitude $O(M^2)$ et $O(M^3)$ ont les vitesses indiquées sur la figure (3.9 .b) (plus les vitesses translatées d'un nombre entier). Si on fait l'approximati à deux résonances sur ce système, on ne retient que les résonances de vitess $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ (notées $\mathcal{R}_2$ et $\mathcal{R}_3$ respectivement) correspondant à des phases $(2\theta-t)$ et $(3\theta-t)$ et qui sont celles retenues par T_R.

La transformation canonique qui supprime les résonances de la figure (3.9 .b) engendre une nouvelle famille de résonances qui contient en particulier les résonances de vitesse $\frac{2}{5}$ et $\frac{3}{8}$ (notées $\mathcal{R}_5$ et $\mathcal{R}_8$), qui sont celles retenues par T_R.

Prenant en compte le fait qu'une vitesse $\frac{\ell}{n}$ correspond à un terme résonnant dont la phase est $(\ell\theta-nt)$, il est facile de se convaincre que l'amplitude des résonances $\mathcal{R}_5$ et $\mathcal{R}_8$ est produite, outre la contribution principale due à $\mathcal{R}_2$ et $\mathcal{R}_3$, par la contribution des résonances de vitesse $\frac{3}{2}$ et - (notées $\mathcal{S}_2$ et $\mathcal{S}_3$ respectivement) et de résonances de vitesse encore plus éloignées de u que ces dernières.

On sait que par T_R, l'écart en vitesse entre $\mathcal{R}_2$ et $\mathcal{R}_3$: $\Delta v = \frac{1}{6}$, est normalisé à 1. L'écart relatif des vitesses des résonances $\mathcal{S}_2$ et $\mathcal{S}_3$ est égal à 11 Δv, alors que l'écart des résonances de vitesse -1 et 2 de H n'était que 3 fois l'écart en vitesse (égal à un) des deux résonances primaires de H les plus proches du tore (voir figure 3.9 .a).

Lorsque Δv est normalisé à 1 par T_R ; la suppression de $\mathcal{S}_2$ et $\mathcal{S}_3$ par la transformation de Kolmogorov fait apparaître des dénominateurs qui sont plus forts que ceux qu'entraine la suppression des résonances -1 et 2 dans H. Cette situation explique pourquoi l'approximation à deux résonances est plus justifiée sur le hamiltonien transformé que sur le hamiltonien initial H.

7. CONCLUSION.

Nous avons construit dans ce chapitre une version modifiée de la transformation de renormalisation d'Escande et Doveil où l'approximation de trajectoire faiblement perturbée est remplacée par l'approximation dite de résonance centrée et la transformation Action-Angle par la transformation de Kolmogorov qui supprime les deux résonances primaires.

Cette nouvelle version notée T_R nous permet d'obtenir les résultats suivants :

- Calcul analytique de quantités universelles (points fixes de T_R, valeurs propres et variétés stables $\mathcal{S}_n^{\lambda}$ associées à ces points fixes).
- Hiérarchie des points fixes de T_R qui conduit au fait que les tores dits nobles sont les derniers à disparaître (la variété stable $\mathcal{S}_1^1$ liée au tore nombre d'or est la seule qui serve pour le calcul de seuil de S.G.E.).
- Calcul analytique du seuil de S.G.E. d'un système hamiltonien à deux degrés de liberté sans utiliser des abaques.

Tous ces résultats sont en bon accord avec les prévisions numériques.

CHAPITRE IV

APPLICATIONS A LA PHYSIQUE DES PLASMAS

De nombreux systèmes physiques peuvent être modélisés par un hamiltonien non intégrable et donc exhiber un comportement chaotique. Nous allons dans cette section appliquer la théorie du groupe de renormalisation développée dans le chapitre précédent à trois systèmes hamiltoniens différents. Le premier est l'application standard qui modélise le mouvement d'une particule chargée dans un paquet d'ondes longitudinales et le mouvement d'une particule dans une bouteille magnétique [19]. Le second est l'application de Cohen [25] qui modélise de façon plus correcte ce dernier problème. La troisième est un hamiltonien de Walker et Ford [18] qui leur a été suggéré par l'étude des chaînes non linéaires d'oscillateurs. C'est un des travaux pionniers des systèmes hamiltoniens. Nous rappellerons tout d'abord la méthode qui nous permet de passer d'un hamiltonien général à l'hamiltonien paradigme, décrite en (3.1.).

1. RAPPELS.

Partant de $\mathcal{H}(\bar{I},\bar{\theta})$, hamiltonien général à deux dégrés de liberté donné par :

$$\mathcal{H}(\bar{I},\bar{\theta}) = \mathcal{H}_o(\bar{I}) + \varepsilon \sum_{i\in J} V_i(\bar{I}) \cos(\bar{P}_i.\bar{\theta}) \qquad (4.1.1.)$$

On peut se ramener localement au hamiltonien paradigme :

$$H(v,x,t) = \frac{1}{2} v^2 - M \cos x - P \cos k(x-t). \qquad (4.1.2.)$$

Cet hamiltonien décrit le tore de fréquence $\bar{\omega}_o$ (d'action $\bar{I}_o$). Soit $\bar{q}$ le vecteur normal à $\bar{\omega}_o$ en $\bar{I}_o$. On définit (α_i, β_i) par

$$\bar{P}_i = \alpha_i \bar{q} - \beta_i \bar{\omega}_o$$

$$\text{et} \quad a = \bar{q} \cdot \frac{d\bar{\omega}}{d\bar{I}}\bigg|_{\bar{I}_o} \cdot \bar{q} \quad .$$

On retiendra dans la sommation (4.1.1.) que les deux résonances (i = m,p) qui correspondent aux $\bar{I}_i$ les plus proches de $\bar{I}_o$ (approximation à deux résonances). Les paramètres (M,P,k) de (4.1.2.) sont donnés par :

$$\left.\begin{aligned} k &= \alpha_\rho / \alpha_m && \text{(a)} \\ M &= Am && \text{(b)} \\ P &= A_p && \text{(c)} \\ \text{avec} \quad A_i &= \varepsilon \left| a\, V_i(I_i) \right| / \Delta v^2 && \text{(d)} \end{aligned}\right\} \qquad (4.1.3.)$$

où $\Delta v = \gamma_m/\alpha_m - \gamma_\rho/\alpha_\rho$ et $\gamma_i = \omega_o^2 \beta_i$. Notons que (4.1.3.d.) est dicté par l'A.R.C. (calcul de l'amplitude des résonances au centre de celles-ci).

Nous avons souligné au paragraphe (3.6.b.iii), que pour éviter de faire l'approximation à deux résonances directement sur $\mathcal{H}(\bar{I},\bar{\Theta})$ on pouvait tenir compte de l'effet de toutes les résonances d'ordre ε. Ceci en opèrant d'abord une transformation de Kolmogorov (cf : 2.2.b.) sur $\mathcal{H}(\bar{I},\bar{\Theta})$ et en faisant ensuit l'approximation à 2 résonances sur le hamiltonien transformé. Nous illustrerons cette méthode sur l'application standard et l'application de Cohen dans ce qui suivra.

2. APPLICATION STANDARD :

a) Application standard de la physique des plasmas.

Beaucoup de problèmes de physique des plasmas où la théorie des oscillations non linéaires à deux degrés de liberté intervient, se ramènent à l'application S de l'espace des phases

$$S:(v,x) \longrightarrow (\bar{v},\bar{x}), \text{ tels que :}$$

$$\begin{aligned} \bar{v} &= v - \left(\frac{K}{2\pi}\right) \sin x \\ \bar{x} &= \bar{x} + 2\pi\bar{v} \end{aligned} \qquad (4.2.1.)$$

appelée application standard [18, 25, 26]. La structure de l'espace des phases de S est périodique non seulement en x (avec une période 2π) mais aussi en v (avec la même période). Il est donc suffisant d'analyser le mouvement du système (4.2.1.) dans le carré $2\pi \times 2\pi$ de l'espace des phases (v,x).

$$H^{(s)}(v,x,t) = \frac{v^2}{2} - M \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos (x-nt) \qquad (4.2.2.)$$

$H^{(s)}$ est le hamiltonien qui décrit le mouvement unidimensionnel d'une particule de masse m = 1, de charge q = 1, de vitesse v et de position x dans une infinité d'ondes longitudinales d'amplitude constante et de vitesses de phase égales à $n \in \mathbb{Z}$; ces ondes sont toutes en phase.

Le mouvement d'une particule chargée dans une bouteille magnétique nous offre un autre exemple où l'application standard S est issue d'un problème de physique des plasma Plus généralement lorsque le champ magnétique $\vec{B}$ est inhomogène mais que ses variations ne sont pas "trop rapides", on introduit, pour décrire le mouvement d'une particule chargée

(charge q, masse m), un invariant dit "adiabatique" qui est le moment magnétique.

$$\mu = m v_{\perp}^2 / 2B \qquad (4.2.3.$$

On prendra dans ce qui suivra m = 1 ; $v_{\perp}$ désigne la composant de la vitesse perpendiculaire au champ $\vec{B}$. La conservation d cet invariant (combinée avec la conservation de l'énergie ci nétique de la particule) implique que les particules sont confinées (ou piégées) dans les régions de champ magnétique minimum. Le mouvement de la particule est alors principaleme un aller et retour entre les deux "goulots" de la bouteille magnétique auquel se superpose la rotation de Larmor. On sup pose que le champ magnétique est parabolique

$$B(z) = B_o(1 + b^2 z^2) \qquad (4.2.4.)$$

où z est mesuré le long de la ligne de champ magnétique (z=0 correspond au minimum B_o) et b est une constante qui mesure dimension caractéristique de l'inhomogénéité du champ magnét que.

Le hamiltonien qui décrit le mouvement longitudinal de la particule est :

$$H(v_{//}, z) = \frac{v_{//}^2}{2} + \mu B(z) \quad ; \quad v_{//} = \dot{z} \qquad (4.2.5.$$

où $v_{//}$ désigne la composante de la vitesse le long de la lign du champ magnétique. L'hypothèse de conservation du moment magnétique implique bien que la particule est piégée dans so mouvement le long de la ligne de champ magnétique et exécute des oscillations de fréquences

$$\Omega = b\sqrt{2\mu B_o} = b\, v \sin\beta_o = b v_{\perp_o}$$

où β_o est l'angle en z=0 de la vitesse avec le champ magnétiq

Les oscillations longitudinales sont données par $z = a \sin \Omega t$ où a est l'amplitude de ces oscillations. Les variations stochastiques de μ vont résulter de résonances entre cette fréquence d'oscillation longitudinale et la fréquence cyclotronique. La condition de résonance s'écrit :

$$n = \frac{\bar{\omega}}{2\Omega} \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad (4.2.6.)$$

où $\bar{\omega}$ est la fréquence cyclotronique moyenne calculée pour une période de piégeage donnée par :

$$\bar{\omega} = \omega_o \left(1 + b^2 \langle z^2 \rangle\right) = \frac{\omega_o}{2} \left(1 + \frac{v^2}{2\mu B_o}\right) = \frac{\omega_o}{2} \left(1 + \frac{1}{\sin^2 \beta_o}\right)$$

où $\omega_o = q B_o / m$ est la fréquence de Larmor en $z = 0$, v désigne la vitesse totale de la particule et nous avons utilisé la relation : $\mu = \frac{v_{\perp_o}^2}{2B_o} = v^2 / 2B(a)$.

L'intégration numérique des équations du mouvement [28, 29] de la particule révèle pour μ le comportement typique suivant en fonction du temps : partant d'une valeur μ_o constante, on observe l'apparition brusque d'oscillations qui croissent très rapidement et s'amortissent non moins rapidement autour d'une nouvelle valeur constante μ_1, l'effet global donne un saut $\Delta\mu = \mu_1 - \mu_o$ du moment mangétique en un temps beaucoup plus court que la période de piégeage (voir fig. 4.1.). Une théorie analytique [30] permet de calculer $\Delta\mu$. Elle montre aussi que le nombre de sauts par période de piégeage et le moment où ils se produisent sont reliés au nombre et à la position des zéros de B(z) dans le plan complexe. Dans le cas considéré ici où B(z) est donné par (4.2.5.), la théorie prévoit que ces sauts se produisent toujours en $z = 0$.

Effectuons maintenant une application Poincaré sur le système. Elle se ramène à un éclairage stroboscopique dont

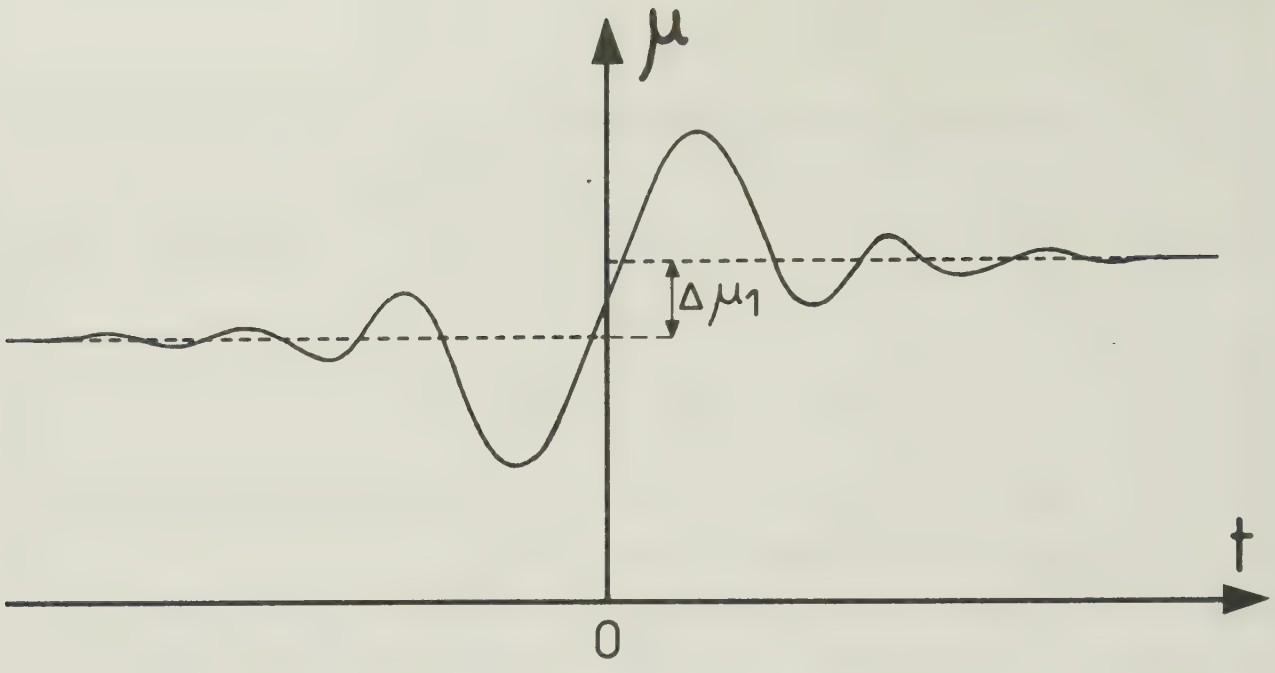


Fig. 4.1 : Comportement schématique du moment magnétique d'une particule en fonction du temps. Le plan médian du système de confinement est traversé à t = 0.

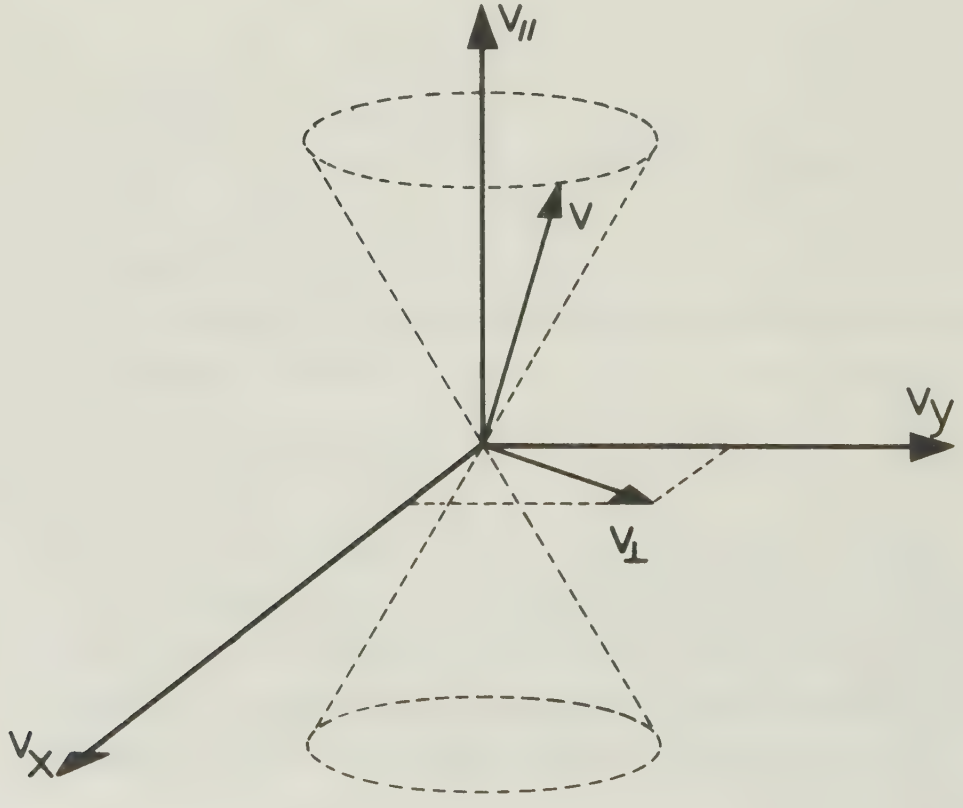


Fig. 4.3 : Cône de perte d'un miroir magnétique.

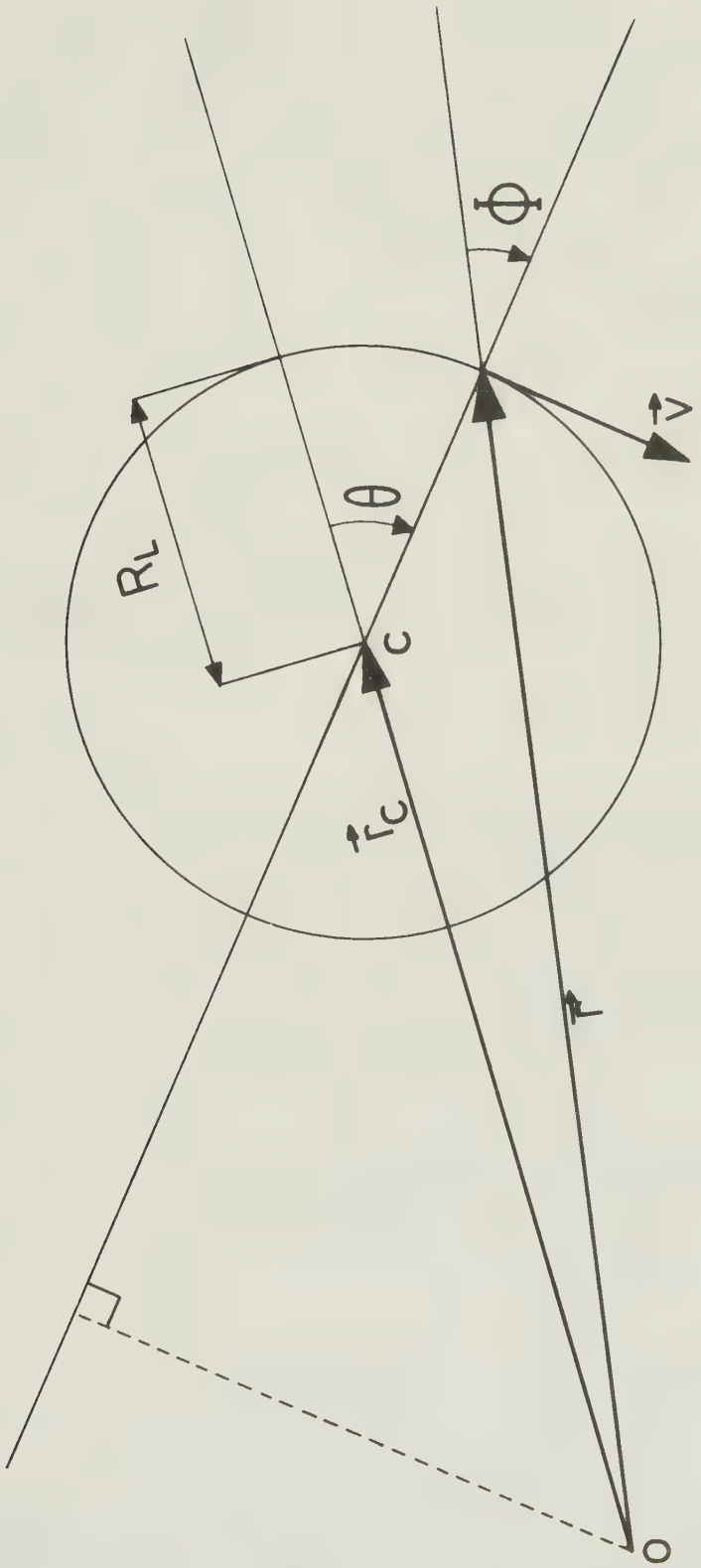


Fig. 4.2 : Projection d'une trajectoire d'une rotation de Larmor de rayon R_L, avec un centre guide situé en C, sur le plan perpendiculaire à l'axe de symétrie O : $\vec{r}$, v représentent la position et la vitesse de la particule ; ϕ et θ sont les phases de la perturbation et la gyrophase respectivement.

les éclairs coïncident avec le passage par le plan z = O (pl
où s'éffectue le changement de μ). L'état du système est com
plètement défini par μ_o et θ_o (valeur du moment magnétique e
de la gyrophase calculée sur le plan z = O) (voir fig. 4.2.)
Une application $\mathcal{A}$ du plan sur lui-même décrivant l'évoluti
temporelle de μ et reliant les valeurs de μ entre deux sauts
successifs est ainsi définie

$$\mathcal{A} : (\mu_o, \theta_o) \to (\bar{\mu}_o, \bar{\theta}_o) \quad .$$

(Les barres indiquent que les quantités sont calculées après
la traversée du plan z = O). L'expression de $\mathcal{A}$ est :

$$\bar{\theta}_o = \theta_o + \Delta(\bar{\mu}) \quad \text{changement de la phase} \qquad (a)$$

$$\bar{\mu} = \mu + \chi(\mu) \sin \theta_o \qquad (b) \quad (4.2.7.$$

L'application $\mathcal{A}$ n'est pas canonique car on a négligé l'in-
fluence des perturbations dans le changement des fréquences
(des phases) donné par (4.2.7.a.). Pour obtenir une applica-
tion canonique on peut tenir compte de cette influence. Au
lieu de le faire directement, on le fera plus simplement.
Utilisant le fait que $\Delta\mu = \bar{\mu} - \mu$ est petit, on pourra linéar
ser $\mathcal{A}$ en μ. Choisissons une valeur résonante de $\mu = \mu_r$ donn
par la condition de résonance (4.2.6.) telle que $D(\mu_r) = 2\pi n$
(où n est entier) et développons $D(\mu) \simeq D(\mu_r) + D'_\mu(\mu_r)(\mu-\mu_r$
$2\pi n + I$. L'application $\mathcal{A}$ s'écrit alors :

$$\bar{I} = I + K \sin \theta_o$$

$$\theta_o = \theta_o + \bar{I}$$

$$\text{avec } K = K(\mu_r) D'_\mu(\mu_r)$$

Rappelons que toutes les quantités sont évaluées en z = O et
pour $\mu = \mu_r$. On reconnait en $\mathcal{A}$ l'application standard [19]
Le jacobien de $\mathcal{A}$: $I, \theta_o \to \bar{I}, \bar{\theta}_o$ est $\partial(\bar{I},\bar{\theta}) / \partial(I,\theta) = 1.$

L'application est donc canonique. κ dépend de μ et décroît de $+\infty$ à zéro quand μ croît de O à $\frac{v^2}{B_o}$. Quand κ atteint une valeur κ_c, correspondant au seuil de stochasticité grande échelle, μ a un comportement stochastique dans une zone située entre O et μ_c (où μ_c est défini par $\kappa(\mu) = \kappa_c$). Si $\mu_c > \mu_L = 1 + \left(\frac{z^2_{max}}{\ell^2}\right)$ où μ_L est le cône de perte classique (voir fig. 4.3.) inhérent à tout miroir magnétique, la stochasticité constitue une cause supplémentaire de perte des particules.

REMARQUE :

L'application standard a aussi été utilisée par CHIRIKOV pour décrire le mouvement proche d'une séparatrice (description des couches stochastiques [18,23].

b) Calcul du seuil de stochasticité grande échelle pour $H^{(S)}$.

De nombreux travaux numériques [18,26,27] ont été effectués sur l'application standard en vue de déterminer son seuil de stochasticité grande échelle. Nous allons donner une estimation analytique de ce seuil, basée sur la transformation T_R développée au chapitre II.

Partant de la formulation hamiltonienne de S :

$$H^{(S)}(v,x,t) = \frac{v^2}{2} - \varepsilon \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(x - nt) \qquad (4.2.8.)$$

Appliquons la méthode décrite au paragraphe (4.1.) concernant la réduction d'un hamiltonien général au hamiltonien paradigme et ce, après avoir opéré en première étape une transformation de Kolmogorov qui évite de faire d'emblée l'approximation à deux résonances. Dans le but de supprimer toutes les résonances d'ordre ε, nous définissons de nouvelles coordonnées action angle à l'aide de la fonction génératrice :

$$F(I,x,t) = Ix + \varepsilon \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin (x - nt)}{I - n} \qquad (4.2.9.)$$

qui au couple (v,x) associe (I,θ) tel que :

$$\theta = \frac{dF}{dI} = x - \varepsilon \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \left(x(I,\theta)-nt\right)}{(I - n)^2} \qquad (a)$$

(4.2.10.)

$$v = \frac{dF}{dx} = I + \varepsilon \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \left(x(I,\theta)-nt\right)}{I - n} \qquad (b)$$

Le nouvel hamiltonien exprimé en fonction de I et θ est :

$$H'(I,\theta,t) = H(I,\theta,t) + \frac{\partial F}{\partial t} \qquad (4.2.11.)$$

alors

$$H'(I,\theta,t) = \frac{1}{2} I^2 + \varepsilon^2 \mathcal{V}(I,\theta,t) \qquad (4.2.12.)$$

où

$$\mathcal{V}(I,\theta,t) = \frac{1}{2} \sum_{m,n} \frac{\cos\left(x(I,\theta)- mt\right) \cos\left(x(I,\theta)-nt\right)}{(I - m)(I - n)}$$

(4.2.13.)

Le seuil de stochasticité grande échelle correspond à la destruction du tore nombre d'or. La variété stable $\mathcal{S}_1^1$ (cf. 3.4 nous donne ce seuil. Les résonances les plus proches du tore sont R_2 et R_3 dont les vitesses sont $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ respectivement. La perturbation (4.2.13.) comporte des termes résonnants du type R_2 correspondant à l'action $I = I_o = (2p + 1/2)$ pour n'importe quel p entier.
Les phases de ces résonances sont $\left(2\theta - (m+n)t\right)$ avec $m + n = 2p + 1$. Nous avons posé dans (4.2.13.), $x(\theta) \approx \theta$ (on suppose ε petit). Pour connaître l'amplitude de ces termes résonnants, calculons :

$$\Sigma_2 = \sum_{m+n=2p+1} \frac{1}{(m - I_o)(n - I_o)} = - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(n - p - \frac{1}{2}\right)^2}$$

(4.2.14.)

Cette somme peut se ramener moyennant un changement d'indice a la somme tabulée [31], $\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \right)$ multipliée par une constante

d'où

$$\Sigma_2 = -\pi^2 \qquad (4.2.15.)$$

Si on tient compte de la dépendance $x(\Theta)$ telle qu'elle est donnée par (4.2.10.a.)

$$x \simeq \Theta + \varepsilon \sum_n \frac{\sin(x - nt)}{(I - n)^2} \qquad (4.2.16.)$$

Etant donné que $|x - \Theta|$ est supposé petit, on peut développer le potentiel $\mathcal{V}(I,\Theta,t)$ pour Θ proche de x. On déduit :

$$\mathcal{V}(I,\Theta,t) = \mathcal{V}(I,x,t) + \left.\frac{d\mathcal{V}}{d\Theta}\right|_{\Theta=x} (\Theta-x) + O(\Theta^2) \qquad (4.2.17.)$$

soit :

$$\mathcal{V}(I,\Theta,t) = \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{m,n} \frac{\cos(\Theta-mt)\cos(\Theta-nt)}{(I-m)(I-n)} +$$

$$\frac{\varepsilon^3}{2} \sum_{m,n,\ell} \frac{\sin\left(2\Theta-(m+n)t\right)\sin(\Theta-\ell t)}{(I-m)(I-n)(I-\ell)^2}$$

(4.2.18.)

Les résonances qui nous intéressent, R_2 et R_3, sont données par le premier et deuxième terme respectivement de (4.2.18.). Les phases des résonances R_3 sont $3\Theta - (m+n+\ell)t$ avec $m + n + \ell = p$ (où p est un nombre entier) et la valeur de I correspondante est $I = I_1 = \frac{p}{3}$ (où p n'est pas un multiple de Ces résonances sont toutes semblables sauf qu'elles sont translatées en I. Pour calculer leur amplitude, il nous faut évaluer la série suivante :

$$\Sigma_3 = \sum_{m+n+\ell=p} \frac{81}{(3m - p)(3n - p)(3m + 3n - 2p)^2}$$

Soit

$$\Sigma_3 = \sum_{m,n} \frac{81}{(3m - 1)(3n - 1)(3m + 3n - 2)^2} \simeq - 86.4 \qquad (4.2.19.)$$

Ce dernier chiffre est calculé numériquement.

Le hamiltonien qui décrit l'influence des deux résonances R_2 et R_3 sur le tore considéré est :

$$H'_1(I,\Theta,t) = H_o(I) + \frac{\varepsilon^2}{4} \Sigma_2 \cos(2\Theta - t) + \frac{\varepsilon^3}{4} \Sigma_3 \cos(3\Theta - t) \qquad (4.2.20.)$$

avec $$H_o(I) = \frac{I^2}{2} + \frac{\varepsilon^3}{4} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(m - I)^2} + O(\varepsilon^3) \qquad (4.2.21.)$$

$H'_1(I,\Theta,t)$ ne comporte que deux résonances. Il a été obtenu à partir de $H'(I,\Theta,t)$ donné par (4.2.12.) après avoir utilisé l'approximation à deux résonances. De (4.2.21.), on en tire :

$$\sigma_o = \left. \frac{d^2 H_o}{dI^2} \right|_{I = I^*} \simeq 1.03 \qquad (4.2.22.)$$

où I^* est l'action correspondant au tore nombre d'or. D'après (3.1.5.) à (3.1.17.) on peut se ramener de $H'_1(I,\Theta,t)$ à un nouvel hamiltonien $H''_1(v',x',t')$ tel que :

$$H''_1(v',x',t') = \frac{v'^2}{2} - M \cos x' - P \cos k(x' - t') \qquad (4.2.23.)$$

où $k = 2/3$.

Soit l'écart en action donné par : $\Delta I = \left| \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right|$ alors, d'après (4.1.3.) on a :

$$M = \frac{\varepsilon^3}{4} \Sigma_3 \sigma_o / (\Delta I)^2$$

$$P = \frac{\varepsilon^2}{4} \Sigma_2 \sigma_o / (\Delta I)^2 \qquad (4.2.24.)$$

De là, on tire une relation entre M et P.

$$P \simeq 1.06\ M^{2/3} \qquad (4.2.25.)$$

Les variétés stables $\mathcal{S}^1(k)$ calculées pour $k = \frac{2}{3}$ (associée à $H"_1$) et $k = \frac{3}{2}$ (associée à $H"_1^e$ caractérisé par $(P, M, \frac{1}{k})$) admettent comme enveloppe supérieure $\mathcal{S}_1^1(k = \frac{2}{3})$. Cette dernière a pour équation d'après (3.4.3.) :

$$P^{\frac{1}{\alpha}} M \left(1 + c\left(\frac{2}{3}\right) P^2\right) = R\left(\frac{2}{3}\right) \qquad (4.2.26.)$$

avec $c\left(\frac{2}{3}\right) \approx 10$ (d'après l'appendice VI), et $R\left(\frac{2}{3}\right) \approx 2.24\ 10^{-3}$ (voir tableau II du chapitre III) et $\alpha = g = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (cf. 3.3.39). Le seuil de stochasticité grande échelle est donné par la solution du système (4.2.25.) et (4.2.26.) soit :

$$\varepsilon \approx 2.51\ 10^{-2} \qquad (4.2.27.)$$

Le paramètre K de l'application standard vaut alors :

$$K = 4\pi^2 \varepsilon \simeq 0.991 \qquad (4.2.28.)$$

La valeur de K issue des calculs numériques de John Greene [26] est :

$$K_{Greene} = 0.971635 \ldots\ldots \qquad (4.2.29.)$$

Ainsi, le seuil théorique présente un bon accord avec la prévision numérique.

Nous avons aussi calculé le seuil, en n'opérant pas la transformation de Kolmogorov multiple sur (5.2.8.) et en faisant l'approximation à deux résonances.

Nous avons alors trouvé comme seuil :

$$K_o = 1.107 \qquad (4.2.30.)$$

Quand on tient compte de l'effet des résonances d'ordre ε à travers la transformation de Kolmogorov multiple, cela a pour résultat de diminuer le seuil. Appliquant la méthode décrite en (4.1.) au hamiltonien (4.2.8.), on a ainsi obtenu un seuil calculé après l'approximation à deux résonances faite directement sur cet hamiltonien.

Le seuil est baissé car les résonances en phase de l'hamiltonien (4.2.8.) exercent un effet de "compression" sur le tore, ce qui a pour effet d'accélérer son processus de destruction. Ce phénomène déjà observé par D. ESCANDE et F. DOVEIL [32,33] montre qu'un changement de phase de résonance a pour effet d'étirer ou de compresser le tore, ce qui conduit par suite à une variation de seuil. Pour mieux comprendre ce phénomène, considérons le hamiltonien :

$$H^4(v,x,t) = \frac{v^2}{2} - \varepsilon \sum_{n=-1}^{2} \eta_n \cos(x - nt) \qquad (4.2.31.)$$

où η est un nombre qui peut prendre les valeur ±1. Notons que les cas où $(\eta_n = +1, \forall n)$ se ramène au hamiltonien de l'application standard (4.2.8.) réduit à 4 résonances en phase Opérons une transformation de Kolmogorov sur $H^4(v,x,t)$. La fonction génératrice de celle-ci s'écrit :

$$F(I,x,t) = Ix + \varepsilon \sum_{n=-1}^{2} \eta_n \frac{\sin(x - nt)}{I - n} \qquad (4.2.32.)$$

De là, appliquant la même procédure que faite précédemment pour le hamiltonien (4.2.8.) ; (4.2.31.) se réduit au hamiltonien à deux résonances :

$$H"_1(v',x',t') = \frac{v'^2}{2} - M \cos x' - P \cos k(x' - t')$$

où k = 2/3

et $$M = \frac{\varepsilon^3}{4} \Sigma_3 \sigma_o / (\Delta I)^2$$

$$P = \frac{\varepsilon^2}{4} \Sigma_2 \sigma_o / (\Delta I)^2$$

avec $$\Sigma_3 = \sum_{\substack{m,n,\ell \\ m+n+\ell=1}} \eta_m \eta_n \eta_\ell \frac{81}{(3m-1)(3n-1)(3\ell-1)^2}$$

et $$\Sigma_2 = \sum_{\substack{m,n \\ m+n=1}} \frac{\eta_m \eta_n}{(m-\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})}$$

$\sigma_o \approx 1$, et $\Delta I = \left|\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right|$.

Appliquant la même méthode que pour le hamiltonien (4.2.8.) on peut calculer analytiquement le seuil de S.G.E. ($K = 4\pi^2\varepsilon$). Si $\eta_n = 1$, $\forall n$

$$K_1 = 4\pi^2\varepsilon = 1.100 \qquad (4.2.33.)$$

Le seuil a ainsi diminué par rapport au cas de l'hamiltonien à deux résonances sont le seuil est donné par K_o (4.2.30.). Le fait que les résonances sont en phase a produit une "compression" du tore et de là une diminution du seuil de S.G.E. Enfin, si $\eta_n = -1$ (pour n = 0,1) et $\eta_n = +1$ pour n = -1,2, les résonances indicées 0 et 1 sont en opposition de phase par rapport aux résonances indicées -1 et 2. Dans ce cas, le seuil de S.G.E. est :

$$K_2 = 1.114. \qquad (4.2.34.)$$

On observe dans ce cas une augmentation du seuil par rapport au cas du hamiltonien à deux résonances. Un effet d'étirement a lieu par suite du déphasage de π existant entre les résonances. Notons que les variations du seuil (augmentation pour K_2 et diminution pour (K_1) sont égales en valeur absolues. Pour le hamiltonien $H^{(4)}$ à 4 résonances, cette variation est :

$$\Delta K = 7\ 10^{-3}. \qquad (4.2.35.)$$

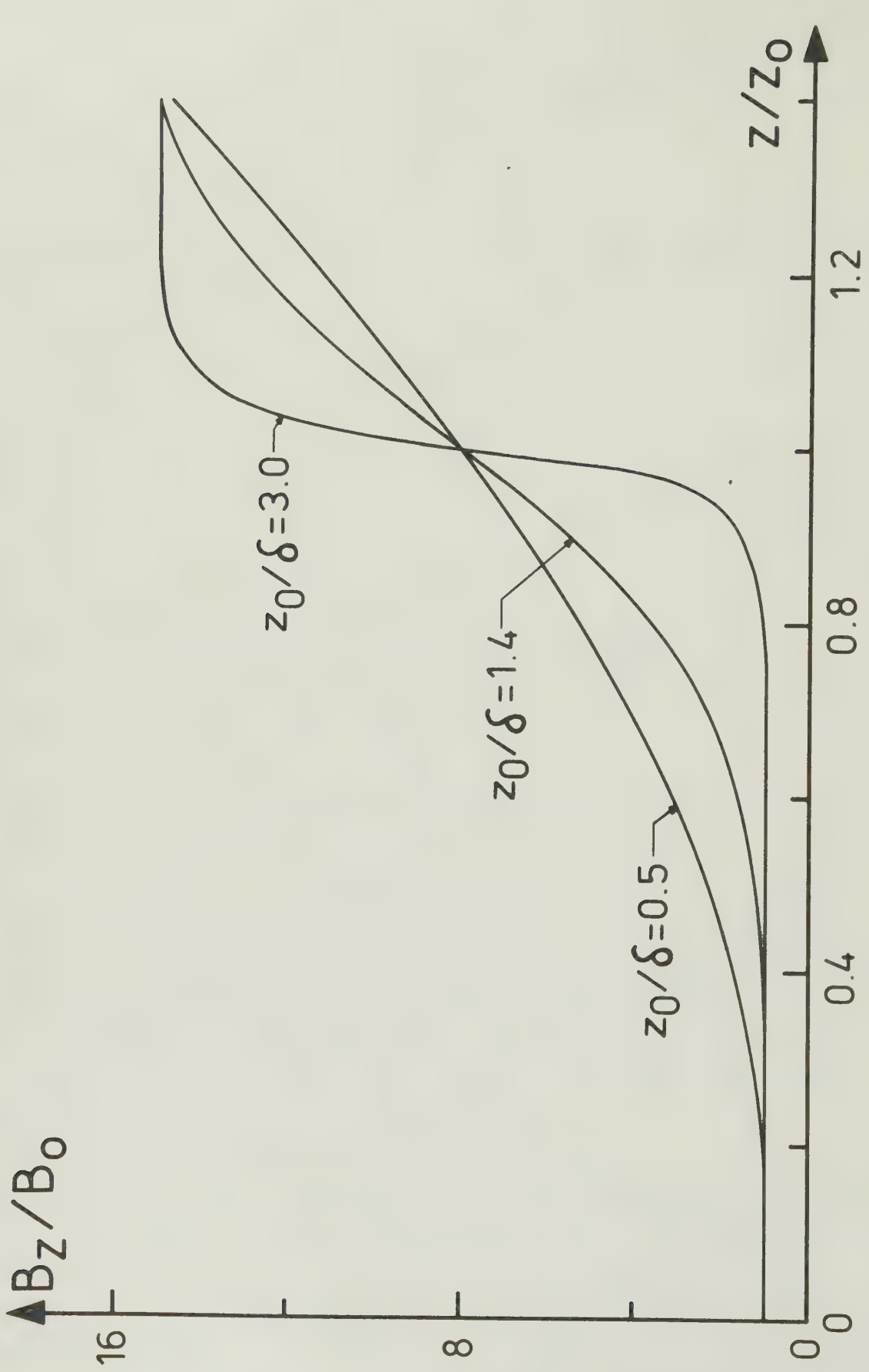


Fig. 4.4 : Profils du champ magnétique pour le modèle donné par l'équation (4.3.1) avec R = 8.

Il y a donc une symétrie entre les phénomènes d'étirement et de compression causés par l'existence de déphasage entre les résonances. En conclusion, on remarquera que les variations de seuil et les phénomènes de "compression" et "d'étirement" sont dûs à la présence de résonances avec des dephasages.

REMARQUE.

Pour illustrer cet effet d'étirement, nous avons considéré le hamiltonien simple (4.2.31.) qui comporte 4 résonances seulement. Le calcul devient fastidieux pour plus de résonances.

3. APPLICATION DE COHEN.

Le problème qui nous intéresse ici est celui de la stochasticité qui apparaît dans le mouvement des particules dans une machine miroir tandem. Dans ce qui suit, nous suivrons l'approche de Cohen [25]. Il modèlise le champ magnétique supposé assymétrique par :

$$B(z) = B_o R \left\{ \gamma \tanh \left[\left(z^2 - z_o^2 \right) / \delta^2 \right] + 1 \right\} \qquad (4.3.1.)$$

où $\gamma \equiv \left(1 - R^{-1}\right) / \tanh \left(z_o^2 / \delta^2\right)$; R est le rapport d'efficacité du miroir $\equiv \dfrac{B(z=z_o)}{B_{max}}$. La figure (4.4.) nous donne la courbe B(z). On remarque que cette courbe présente une base "plate" ; ensuite il y a une montée raide pour atteindre un régime où B(z) atteint une valeur asymptotique. Suivant la valeur de δ cette montée est plus ou moins "abrupte". Pour z_o/δ petit, il y a un seul zéro de B appartenant au demi-plan complexe supérieur qui contribue au changement du moment magnétique μ, ce qui donne naissance à un seul saut en z = O. Si on augmente z_o/δ, l'unique zéro de B donne naissance à deux autres

pour $\delta = \delta_c$, défini par $\gamma(\delta_c) = 1$. Pour $z_o/\delta > z_o/\delta_c$, deux sauts ont lieu pour une période de piégeage. Pour les valeurs importantes de z_o/δ, ces sauts ont lieu près des bords du solénoïde. Ces prédictions sont issues de calculs numériques.

Cohen [30] montre que le taux de variation de μ est :

$$\frac{\Delta\mu}{\mu} = \left(\frac{v}{v_\perp}\right)_o \mathrm{Re}\left[\exp\ (i\theta_o)\right] \sum_j A_j \exp\left(i\,\Delta\theta_j\right) \qquad (4.3.2.)$$

où θ est la gyrophase, l'indice zéro signifie que la quantité est calculée en $z = 0$ (point où B est mimimum le long de la ligne de champ). La somme porte sur les zéros de B dans le plan complexe. Les coefficients A_j dépendent du champ magnétique. $\theta_o + \Delta\theta_j$ représente la gyrophase complexe calculée pour la singularité,

$$\Delta\theta_j = \frac{q}{m} \int_{z=0}^{z_j} dz\ \frac{B}{v_{/\!/}(\mu, W, B)} \qquad (4.3.3.)$$

où z_j est la position du $j^{\text{ième}}$ zéro de B et W est l'énergie. Dans le régime $z_o / \delta > 1$, la variation du momment magnétique pour une particule proche de l'axe est :

$$\frac{\Delta\mu}{\mu} = \left(3\pi\Omega_o r_o/2v\right)\exp\left(-\mathrm{Im}\Delta\theta\right)\cos\left(\mathrm{Re}\Delta\theta\right)\cos\theta_o \qquad (4.3.4.)$$

Si $\mathrm{Re}\Delta\theta = (2n + 1)\ \frac{\pi}{2}$ $(n \in Z')$ alors $\Delta\mu$ est nul quel que soit θ. Les approximations faites pour déduire (4.3.4.) sont d'autant plus justifiées pour $\delta > \delta_c$ (deux sauts par période). L'équation (4.3.4.) présente un bon accord avec les calculs numériques [25]. L'annulation de $\Delta\mu$ peut être interprétée comme une suppression des deux sauts quand la gyrophase accumulée par la particule entre les points où les sauts ont lieu, est égale à $(2n+1)\pi$. L'existence de cette annulation suggère la possibilité d'une succession de barrières dans l'espace des

phases, régions de courbes invariantes de K.A.M., que les particules ne peuvent pas traverser même si la région entre ces barrières est stochastique. Cohen montre que de telles barrières peuvent plus probablement être observées quand il existe un grand degré d'assymétrie : une particule réalise deux sauts en rapide succession (séparés d'une gyropériode), suivis d'un intervalle de temps long, suivis de deux sauts en rapide succession. Un tel comportement existe pour $z_o/\delta \gg 1$.

Pour étudier cette situation, il la modélise par une application standard assymétrique à deux étapes, définies par :

$$\begin{aligned} \bar{I} &= I + k \sin \Theta \qquad & \bar{\bar{I}} &= \bar{I} + k \sin \bar{\Theta} \\ \bar{\Theta} &= \Theta + \lambda_1 \bar{I} \qquad \text{et} & \bar{\bar{\Theta}} &= \bar{\Theta} + \lambda_2 \bar{\bar{I}} \end{aligned} \tag{4.3.5.}$$

Soit $T = \lambda_1 + \lambda_2$ la période d'un piégeage. A cette application, on peut associer formellement un hamiltonien qui décrit le même système que (4.3.5.).

$$H(I,\Theta,\tau) = \frac{I^2}{2} + k \cos \Theta \left[\delta_T(\tau) + \delta_T(\tau - \lambda_1) \right] \tag{4.3.6.}$$

Avec le changement de variables :

$$\tau = at \qquad \text{où} \qquad a = \frac{T}{2\pi} \tag{4.3.7.}$$

le hamiltonien (4.3.6.) devient :

$$H(I,\Theta,t) = -\frac{J^2}{2} + k \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{(2\pi)} \left[\delta_{2\pi}(t) + \delta_{2\pi}(t - \varphi) \right] \cos \Theta \tag{4.3.8.}$$

avec $J = aI$, $\varphi = \frac{2\pi}{T} \lambda_1$ et $\delta_{2\pi}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos nt$

d'où (4.3.8.) s'écrit :

$$H(I,\Theta,t) = \frac{J^2}{2} + M \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\cos(\Theta - nt) + \cos(\Theta - n(t-\varphi))\right] \qquad (4.3.9.)$$

avec $M = k \dfrac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{(2\pi)^2}$

Soit $x = \Theta - nt$ et $\beta_n = -n\varphi$. L'expression entre crochets de (4.3.9.) devient :

$$\cos x + \cos(x-\beta_n) = \cos x(1+\cos\beta_n) + \sin x \sin \beta_n \qquad (4.3.10.)$$

Définissons $A_n^2 = (1+\cos\beta_n)^2 + \sin^2\beta_n \equiv 2(1+\cos\beta_n) =$

$$= 4\cos^2\left(\frac{n\varphi}{2}\right)$$

et

$$\begin{cases} \cos\alpha_n = \dfrac{1+\cos\beta_n}{A_n} \\ \sin\alpha_n = \dfrac{\sin\beta_n}{A_n} \end{cases} \qquad (4.3.11.)$$

(4.3.10.) devient :

$$\cos x + \cos(x-\beta_n) = A_n \cos(x-\alpha_n)$$

Le hamiltonien $H(I,\Theta,t)$ s'écrit :

$$H(I,\Theta,t) = \frac{J^2}{2} + M \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \cos(\Theta - nt - \alpha n) \qquad (4.3.12.)$$

On constate que cet hamiltonien a une structure semblable à celle de l'application standard (4.2.8.), sauf que le $n^{ième}$ terme résonnant a une amplitude multipliée par A_n et un déphasage α_n. L'observation de l'espace des phases d'un tel hamiltonien révèle son inhomogénéité. Il existe des régions où le chaos n'apparaît que pour des valeurs de M très importantes. Des bandes (ou fossés) apparaissent ainsi où la stochasticité n'est pas présente, alors que dans d'autres régions

de l'espace des phases elle existe déjà. Nous appellerons ces zones "fossés de Cohen" en traduction de l'anglais "Cohen's gaps" [34]. On peut expliquer l'existence de "fossés" comme la manifestation de l'élévation du seuil de S.G.E. du système (4.3.12.). Ces "fossés" ont lieu dans le domaine de J (l'action) où les coefficients A_n passent par leur minimum. Si M est assez fort, il n'existe plus de "fossé" dans l'espace des phases. La valeur de M pour laquelle le dernier "fossé" disparaît correspond au M_{seuil} pour lequel la stochasricité grande échelle a lieu.

Nous éliminerons dès maintenant le cas où $\frac{\varphi}{2\pi}$ est irrationnel pour lequel il n'y a pas de périodicité de l'espace des phases en action J (pour analyser ce cas, on doit définir un domaine de J pour étudier le chaos). Nous considérerons dans ce qui suivra, le cas où $\frac{\varphi}{2\pi}$ est rationnel :

$$\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{P}{q} \qquad (4.3.13.)$$

(où p et q sont des nombres entiers). La périodicité de l'espace des phases en action est alors $\Delta J = q$.

Faisons tout d'abord une estimation du seuil par l'approximation à deux résonances réalisées sur le hamiltonien (4.3.12.) qui va nous fournir le critère déjà trouvé par Cohen [25], pour la disparition du dernier "fossé" (soit l'apparition de stochasticité grande échelle dans le système). Pour réaliser cette estimation, analysons deux cas :

<u>1er cas</u> : $q = 2q'$.

Pour $J = q'$ on aura d'après (4.3.11.) :

$$A_{q'} = 0 \qquad (4.3.14.)$$

Dans le cadre de l'approximation à deux résonances, le seuil est donné par le recouvrement des résonances [19] d'indice $n = q' \pm 1$. Ces deux résonances ont des amplitudes égales données par :

$$MA_{q'\pm 1} = 2M\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right| \qquad (4.3.15.$$

Le paramètre de stochasticité s egal à la somme des deux demi largeurs de résonances (cf. 1.2.) est donné par :

$$s = 4\sqrt{2M\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|} \qquad (4.3.16.$$

Pour $s < s_{seuil}$ il existe un fossé, quand $s > s_{seuil}$ la stochasticité grande échelle est partout présente dans le systèm

Notons que notre approche du problème est différente de celle de Cohen dans le sens que nous avons adopté la formulation hamiltonienne du problème, alors qu'il utilise l'application (4.3.1.).

2ème cas : $q = 2q' + 1$.

On doit trouver la valeur de n pour laquelle le paramètre s' défini par :

$$s' = \sqrt{A_n} + \sqrt{A_{n+1}} \qquad (4.3.17.$$

est minimum. Cette fois-ci l'apparition du fossé est liée à un minimum non nul de l'amplitude A_n. L'emplacement de ce minimu sur l'axe J (des actions) dépendra de la parité de p cette fois-ci (cf. 4.3.13.). Dans le cas où p = 1,

$$J = q' + \frac{1}{2} \qquad (4.3.18.$$

et $A_n = A_{n+1} \simeq \frac{\varphi}{2}$ (pour φ petit) la condition d'existence du "fossé" est :

$$\pi^2 \, s'^2 \, M \; < \; K_{seuil} \qquad (4.3.19.)$$

où K_{seuil} est la valeur du seuil de S.G.E. pour l'application standard ($K \simeq 1$). En utilisant (4.3.18) ; la relation (4.3.19) devient :

$$\pi \, k \, \lambda_1 \; < \; 1 \qquad (4.3.20.)$$

L'approximation à deux résonances nous conduit donc à cette condition déjà trouvée par Cohen donnée par (4.3.20.) pour l'existence d'un "fossé". Les travaux numériques de Cohen ont montré que pour des valeurs importantes de λ_2, la relation (4.3.20.) n'est plus valable. Par exemple, pour $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 \simeq 72$ il obtient $k = .1$ pour la disparition du dernier fossé. La raison pour laquelle le critère (4.3.20.) n'est plus valable pour les grandes valeurs de λ_2 est que pour établir cette relation, nous avons considéré seulement l'influence des deux résonances les plus proches qui ont des amplitudes petites pour λ_2 grand (cf. 4.3.11.). L'apparition de la stochasticité est dans ce cas dû aussi à l'influence des résonances plus lointaines mais d'amplitude plus forte. L'approximation à deux résonances ne rend pas compte de cet effet et donne des résultats érronnés dès que les amplitudes des résonances en question sont petites. Il faut donc utiliser une autre méthode, en l'occurence celle que nous avons décrite au paragraphe (4.1.) pour calculer le seuil de S.G.E. d'un hamiltonien général.

Pour appliquer cette méthode, opérons une transformation de Kolmogorov sur le hamiltonien (4.3.12.) qui supprime toutes les résonances d'ordre M. La fonction génératrice de cette transformation donnée par :

$$F(I,\theta,t) \; = \; I\theta + M \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \, \frac{\sin(\theta - nt - \alpha_n)}{n - I} \qquad (4.3.21.)$$

définit de nouvelles variables (I,ψ) tel que (4.3.12.) s'écrit :

$$H'(I,\psi,t) = \frac{I^2}{2} + M^2 \sum_{m,n} A_n A_m \frac{\cos\left(\theta(I,\psi)-mt-\alpha_m\right)\cos\left(\theta(I,\psi)-nt-\alpha\right.}{(m-I)(n-I)}$$

(4.3.22

La valeur de J pour laquelle il existe le plus grand fossé est d'après (4.3.18.) :

$$J = q' + \frac{1}{2}$$

qui correspond à la résonance n = q'. D'après le paragraphe (3.4.d.) le seuil de S.G.E. est équivalent à la destruction du tore nombre d'or τ_1^1. Les résonances les plus proches de c dernier sont celles dont les vitesses de phase J sont respectivement $(q' + \frac{1}{2})$ et $(q' + \frac{1}{3})$. Le hamiltonien réduit à deux résonances qui décrit τ_1^1 est :

$$\mathcal{H} = \frac{I^2}{2} + \frac{M^2}{4}\Sigma_2\cos\left(2\psi-(2q'+1)t\right)+\frac{M^2}{4}\Sigma_2\sin\left(2\psi-(2q'+1)t\right)$$

$$+ \frac{M^3}{4}\Sigma_3\cos\left(3\psi-(3q'+1)t\right)+\frac{M^3}{4}\Sigma_3\sin\left(2\psi-(3q'+1)t\right) \qquad (4.3.23$$

où

$$\Sigma_2 = \sum_{\substack{m,n \\ m+n=2q'+1}} \frac{A_m A_n \cos\left(\alpha_m + \alpha_n\right)}{\left(n-\frac{2q'+1}{2}\right)\left(m-\frac{2q'+1}{2}\right)}$$

$$\Sigma_2' = \sum_{\substack{m,n \\ m+n=2q'+1}} \frac{A_m A_n \sin\left(\alpha_m + \alpha_n\right)}{\left(n-\frac{2q'+1}{2}\right)\left(m-\frac{2q'+1}{2}\right)}$$

(4.3.24

$$\Sigma_3 = \sum_{\substack{m,n,\ell \\ m+n+\ell=3q'+1}} \frac{A_m A_n A_\ell \cos\left(\alpha_m + \alpha_n + \alpha_\ell\right)}{\left(m-\frac{3q'+1}{3}\right)\left(n-\frac{3q'+1}{3}\right)\left(\ell-\frac{3q'+1}{3}\right)^2}$$

$$\Sigma'_3 = \sum_{\substack{m,n,\ell \\ m+n+\ell=3q'+1}} \frac{A_m A_n A_\ell \sin(\alpha_m + \alpha_n + \alpha_\ell)}{\left(m - \frac{3q'+1}{3}\right)\left(n - \frac{3q'+1}{3}\right)\left(\ell - \frac{3q'+1}{3}\right)^2} \qquad (d)$$

On peut se ramener à partir de (4.3.23) au hamiltonien :

$$H''(v,x,t') = \frac{1}{2} v^2 - \mathcal{M} \cos x - \mathcal{P} \cos k'(x-t') \qquad (4.3.25.)$$

en utilisant la méthode décrite dans l'appendice I où :

$$\mathcal{M} = - \frac{\sqrt{\Sigma_3^2 + \Sigma_3'^2}\ \sigma}{\Delta J^2} \left(\frac{M}{4}\right)^3$$

$$\mathcal{P} = - \frac{\sqrt{\Sigma_2^2 + \Sigma_2'^2}\ \sigma}{\Delta J^2} \left(\frac{M}{4}\right)^2 \qquad (4.3.26.)$$

$\Delta J = \left|\left(2q'+\frac{1}{2}\right) - \left(2q'+\frac{1}{3}\right)\right| = \frac{1}{6}$, $\sigma = \frac{d^2 H_o}{dI^2}$ où H_o est la partie intégrable de (4.3.22.)

$$\sigma = 1 + \frac{3}{2} M^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{A_n^2}{(n - J)^2} \qquad (4.3.27.)$$

Prenons l'exemple où $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 72$. Nous avons alors $q' = 36$. Dans ce cas $\sigma \simeq 1.06$. L'évaluation des quantités Σ_2 et Σ'_2 nous procure :

$$\Sigma_2 = - \frac{4\pi^2}{73} \simeq - 5.41\ 10^{-1}$$

$$\Sigma'_2 = 0 \qquad (4.3.28.)$$

Les séries Σ_3 et Σ'_3 sont calculées numériquement. Nous obtenons :

$$\sqrt{\Sigma_3^2 + \Sigma_3'^2} = .165 \qquad (4.3.29.)$$

En utilisant les relations de (4.3.26.) à (4.3.29.), on obtient :

$$\mathcal{P} = 3.8 M_0^{2/3} \qquad (4.3.30.)$$

La valeur du seuil est donnée par l'intersection de cette courbe avec la variété stable $\mathcal{S}_1^1$ donnée par (4.2.26.). Nous trouvons $k_{seuil} \simeq .09$ qui est à 10% près égal au seuil trouvé numériquement par Cohen pour ce cas. La valeur de M_{seuil} est d'après (4.3.9.) :

$$M_{seuil} \simeq 0.166$$

[Dans le cas de l'application standard on a trouvé $M_{seuil} \simeq 2.51\ 10^{-2}$, (cf. 4.2.27)]. La valeur de M_{seuil} est sept fois plus élevé pour le hamiltonien (4.3.12.) avec ($\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 72$) que pour l'application standard.

On remarque que sans faire aucune hypothèse sur les paramètres λ_1, λ_2 ou k, et en appliquant tout simplement la méthode décrite au paragraphe (4.1.), nous avons déduit la bonne estimation du seuil de stochasticité grande échelle grande échelle pour le cas litigieux ($\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 72$) qui amena Cohen à changer de critère pour les grandes valeurs de λ_2. La méthode basée sur le groupe de renormalisation développée au chapitre III concernant le calcul de seuil de S.G.E. est systématique, il suffit d'appliquer directement au hamiltonien (4.3.12.) pour déduire la bonne estimation de ce seuil. La raison pour laquelle cette méthode est adéquate est qu'elle tient compte de l'influence de toutes les résonances d'ordre M (à travers la transformation de Kolmogorov multiple). Pour le problème de Cohen, cette influence est importante puisque le tore considéré subit des "compressions" de la part des grosses résonances éloignées, vu que celles qui l'encadrent ont de faibles amplitudes.

4. APPLICATION DE T_R A L'ETUDE DE LA STOCHASTICITE GRANDE ECHELLE D'UN HAMILTONIEN de WALKER et FORD.

Le hamiltonien que nous étudions dans ce qui suit est un hamiltonien de Walker et Ford [18]. Cet exemple a été choisi car il est considéré comme un travail de pionnier de Walker et Ford et est toujours cité en référence.

Considérons le hamiltonien :

$$H(J_1,J_2,\varphi_1,\varphi_2) = H_o(J_1,J_2) + \alpha J_1 J_2 \cos(2\varphi_1 - 2\varphi_2) + \beta J_1 J_2^{3/2} \cos(2\varphi_1 - 3\varphi_2) \qquad (4.4.1)$$

où : $$H_o(J_1,J_2) = J_1 + J_2 - J_1^2 - 3J_1J_2 + J_2^2 \qquad (4.4.2).$$

Cet hamiltonien (4.4.1) a été suggéré à Walker et Ford par l'étude du comportement d'un système d'oscillateurs perturbé simultanément par deux résonances isolées. Les deux auteurs proposèrent une méthode analytique pour calculer le seuil de S.G.E de (4.4.1), qui consiste à calculer les séparatrices exactes des résonances non perturbées et à leur appliquer le critère de recouvrement des résonances de CHIRIKOV [19] (cette méthode est décrite au paragraphe 2.1). L'énergie correspondante au seuil de S.G.E. qu'ils obtiennent analytiquement pour $\alpha = \beta = 0.02$ est $E_s = .2095$ alors que leurs calculs numériques donnaient $E_s \lesssim 0.20$. Nous avons de notre côté calculé la valeur de E_s numérique par intégration directe des équations du mouvement de (4.4.1) avec $\alpha = \beta = 0.02$, la valeur de E_s obtenue est $E_s \lesssim .195$. Le fait que la valeur de E_s numérique obtenue par Walker et Ford soit supérieure à celle que nous avons obtenue est dû à ce qu'ils n'ont pas suivi les orbites pendant un temps suffisamment long pour pouvoir observer un comportement stochastique de ces dernières pour des énergies $E \lesssim 0.20$.

On se propose dans ce qui suit d'appliquer la méthode décrite au paragraphe (4.1) au hamiltonien (4.4.1) avec $\alpha = \beta = 0.02$ pour déduire la

valeur de E_s. Nous le comparons à la valeur de E_s numérique que nous avons obtenue. Le hamiltonien (4.4.1) possède déjà deux résonances, le problème de l'approximation à deux résonances ne se pose pas. Ecrivons (4.4.1) sous la forme :

$$H(\bar{J}, \bar{\varphi}) = H_o(\bar{J}) + \varepsilon \sum_{i=m}^{p} V_i(\bar{J}) \cos(\bar{p}_i . \bar{\varphi}) \qquad (4.4.3$$

où : $\bar{J} = (J_1, J_2)$, $\bar{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2)$, $\varepsilon = \alpha = \beta = 0.02$ et :

$$V_1(\bar{J}) = J_1 J_2 \quad \text{et} \quad V_2(\bar{J}) = J_1 J_2^{3/2}$$

$$\bar{p}_m = (2, -2) \quad \text{et} \quad \bar{p}_p = (2, -3)$$

Soit : $\bar{\omega} = \dfrac{\partial H_o}{\partial \bar{J}}$, on a alors :

$$\bar{\omega} = (\omega_1, \omega_2) \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} \omega_1 = 1 - 2J_1 - 3J_2 \\ \omega_2 = 1 + 2J_2 - 3J_1 \end{cases} \qquad (4.4.4$$

La condition de résonance $\bar{p}_i . \bar{\omega}(\bar{J}) = 0$ $(i = 1,2)$ nous procure :

$$\bar{p}_m . \bar{\omega} = 0 \quad \text{d'où :} \quad 5J_2 - J_1 = 0 \qquad (4.4.5)$$

et : $\bar{p}_p . \bar{\omega} = 0$ d'où : $12J_2 - 5J_1 + 1 = 0$ (4.4.6

Les relations (4.4.5) et (4.4.6) définissent les deux résonances du hamiltonien (4.4.1). Chacune des deux résonances est caractérisée par la valeur de l'action $\bar{J}_i$ (i = m, p) qui se trouve sur la courbe d'énergie $H_o(\bar{J}) = E$ (voir Fig. 3.1). Les vecteurs $\bar{\omega}_i = \bar{\omega}(\bar{J}_i)$ sont normaux en $\bar{J}_i$ à cette courbe d'énergie donnée par :

$$H_o(\bar{J}) = J_1 + J_2 - J_1^2 - 3J_1 J_2 + J_2^2 = E \tag{4.4.7}$$

La valeur de l'action $\bar{J}_m$ de la résonance m est déterminée à partir du système (4.4.5) et (4.4.7). Soit $\bar{J}_m = (J_{1_m}, J_{2_m})$, on obtient :

$$\begin{aligned} J_{1_m} &= \frac{5}{13}\left[1 - \left(1 - \frac{13}{3}E\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\ J_{2_m} &= \frac{1}{13}\left[1 - \left(1 - \frac{13}{3}E\right)^{\frac{1}{2}}\right] \end{aligned} \tag{4.4.8}$$

De (4.4.8) on constate que cette résonance n'existe que pour les énergies telles que $0 \leq E \leq 3/13 \simeq .23$. Quand l'énergie augmente à partir de zéro, la résonance m s'écarte de l'origine et sa largeur augmente.

De même en résolvant le système (4.4.6) et (4.4.7), on obtient pour la résonance p, $\bar{J}_p = (J_{1_p}, J_{2_p})$ telles que :

$$\begin{aligned} J_{1_p} &= \frac{1}{13}\left[5 - 12\left(\frac{3 - 13E}{23}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\ J_{2_p} &= \frac{1}{13}\left[1 - 5\left(\frac{3 - 13E}{23}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \end{aligned} \tag{4.4.9}$$

L'action étant définie positive, par $0 \leq E \leq 3/13$ (condition d'existence des résonances m et p), il faut que $J_{1_p}, J_{2_p} \geq 0$, d'où si $E < 0.16$ ($J_{2_p} < 0$), la résonance p n'existe pas. Elle apparaît abruptement pour $E = 0.16$. De ces considérations on sait déjà que la valeur de E_{seuil} vérifie : $0.16 < E_s \leq 3/13 \simeq .23$.

On s'intéresse à la stabilité d'un tore d'action $\bar{J}_o$ (J_{1_o}, J_{2_o}) appartenant à la courbe d'énergie $H_o(\bar{J}) = E$ et de fréquence $\bar{\omega}_o = \bar{\omega}(\bar{J}_o)$. Soit $\bar{q}$ le vecteur tangent à la courbe d'énergie en $\bar{J}_o$ (perpendiculaire à $\bar{\omega}_o$; voir Fig. 3.1) défini par :

$$\bar{p}_i = \alpha_i \bar{q} - \beta_i \bar{\omega}_o \qquad (i = m, p) . \qquad (4.4.1$$

Le tore peut être caractérisé par l'angle ψ que fait $\bar{\omega}_o$ avec l'axe OJ_1. Utilisant (4.4.3) et (4.4.10) il vient :

$$\alpha_m = 2 (\cos \psi + \sin \psi)$$

$$\beta_m = 2 (\sin \psi - \cos \psi) / \omega_o \qquad (4.4.1$$

$$\alpha_p = (2 \sin \psi - 3 \cos \psi)$$

$$\beta_p = (3 \sin \psi - \cos \psi) / \omega_o$$

où $\omega_o = \| \bar{\omega}_o \|$.

En utilisant la méthode décrite en (4.1), on peut à partir de (4.4.3) se ramener au hamiltonien :

$$H(v,x,t) = \frac{1}{2} v^2 - M \cos x - P \cos k (x - t) \qquad (4.4.1$$

où $k = \alpha_p / \alpha_m$ et : $M = A_m$ et $P = A_p$ avec :

$$A_i = \varepsilon \left| a\, V_i\, (\bar{J}_i) \right| / \Delta v^2 \quad . \tag{4.4.13}$$

où :
$$a = \bar{q} \cdot \frac{d\bar{\omega}}{d\bar{J}} \Big|_{\bar{J}_o} \cdot \bar{q} \tag{4.4.14}$$

et :
$$\Delta v = \frac{\gamma_m}{\alpha_m} - \frac{\gamma_p}{\alpha_p}, \qquad \gamma_i = \omega_o^2\, \beta_i \quad (i = m, p). \tag{4.4.15}$$

Utilisant les relations (4.4.11) il vient :

$$k = \frac{2t + 3}{2\,(1+t)} \quad \text{où} \quad t = \operatorname{tg} \psi \qquad \text{(a)}$$

$$a = \frac{2\,(-t^2 + 3t + 1)}{1 + t^2} \qquad \text{(b)} \tag{4.4.16}$$

$$\Delta v = \frac{-\,\omega_o\,(1 + t^2)}{2t^2 + 5t + 3} \qquad \text{(c)}$$

On veut exprimer tous les paramètres en fonction de ψ et de l'énergie E, pour cela il nous faut connaître $\omega_o\,(E, \psi)$. En utilisant la définition de $\bar{\omega}_o = \bar{\omega}\,(\bar{J}_o) = \omega_o\,(\cos\psi, \sin\psi)$ et les relations (4.4.4) et (4.4.7) on obtient :

$$\omega_o = \left[\frac{(3 - 13E)\,(1 + t^2)}{1 - t^2 + 3t} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{4.4.17}$$

Le tore considéré correspond à une vitesse moyenne u donnée par (Cf. 3.1.20)

$$u = \frac{\alpha_p\ \beta_m}{\alpha_p\ \beta_m - \alpha_m\ \beta_p} \tag{4.4.18}$$

soit en utilisant (4.4.11) :

$$u = \frac{-2t^2 - t + 3}{1 + t^2} \qquad (4.4.19)$$

d'autre part, d'après (3.2.9.d) et (3.2.23), on a :

$$u = \frac{k}{k + n + \delta k_n^{\lambda}} \qquad (4.4.20)$$

(le tore étant défini par son nombre d'onde $Q_o = k + n + \delta k_n^{\lambda}$)

La solution de cette équation implicite en t, nous donne la valeur de l'angle ψ qui caractérise le tore. En utilisant (4.4.19), l'équation (4.4.20) s'écrit :

$$(6 + 4\nu)\, t^3 + (11 + 6\nu) t^2 - (1 + 4\nu)\, t - 6\,(1 + \nu) = 0 \qquad (4.4.21)$$

avec : $\nu = n + \delta k_n^{\lambda}$

La destruction du tore τ_1^1 ($Q_1 = k + 1 + \delta k_1^1$) avec $1 + \delta k_1^1 = g$ (nombre d'or), correspond au seuil de stochasticité grande échelle (Cf. 3.4.d). Pour définir l'énergie E_s considérons la stabilité de τ_1^1. Dans ce cas ψ donné par (4.4.21) où $\nu = g$ est :

$$\psi = 0.698 \text{ rd} \quad (\simeq 40°) \qquad (4.4.22)$$

soit : $t = \text{tg}\ \psi = 0.839$

En utilisant les relations (4.4.8), (4.4.13), (4.4.16 b et c) et (4.4.17) on obtient :

$$M = \frac{10\varepsilon}{507} \frac{(1 - t^2 + 3t)^2 (2t^2 + 5t + 3)}{(1 + t^2)^5 y^2} (1 - y)^2 \qquad (4.4.23)$$

avec $y = (1 - \frac{13E}{3})^{\frac{1}{2}}$

De même les relations (4.4.9), (4.4.13), (4.4.16 b et c), (4.4.17) procurent :

$$P = \frac{2\varepsilon}{169} \frac{(2t^2 + 5t + 3)(1 - t^2 + 3t)^2}{(1 + t^2)^5 y^2} [5 - 12 \left(\frac{3}{23}\right)^{\frac{1}{2}} y][1 - 5 \left(\frac{3}{23}\right)^{\frac{1}{2}} y] \qquad (4.4.24)$$

Eliminant y entre (4.4.23) et (4.4.24), on obtient une relation entre M et P. Pour connaître la valeur du seuil on utilise la variété stable $\mathcal{S}_1^1$ (k). D'après (4.4.16a) et (4.4.22) :

$$k \simeq 1.27 \qquad (4.4.25)$$

Nous trouvons ainsi :

$$E_{seuil} \simeq 0.198 \qquad (4.4.26)$$

qui est à 3 % la prévision numérique que nous avons obtenu ($E_{s\ numérique}$ = 0.195).

5. CONCLUSION.

A travers les exemples auxquels nous avons appliqué la méthode basée sur T_R pour la détermination du seuil de S.G.E., nous avons constaté que cette méthode est systématique. De très bons accords avec les prévisions numériques sont ainsi obtenus. Ainsi, pour de nombreux systèmes physiques où la stochasticité apparaît, cette méthode est un outil analytique qui donne des bonnes estimations des seuils de S.G.E. et permet d'éviter des calculs numériques longs et onéreux.

CONCLUSION

Nous avons montré que l'étude de la stabilité d'un tore donné d'un système hamiltonien à deux degrés de liberté se fait au moyen d'un hamiltonien équivalent très simple (celui associé au mouvement d'une particule dans deux ondes longitudinales) que nous appelons hamiltonien paradigme (noté H_p).

Nous avons construit une transformation de renormalisation T_R pour le hamiltonien H_p. T_R est une nouvelle version de la transformation de renormalisation d'Escande et Doveil où l'on a remplacé la transformation action-angle par la transformation dite de Kolmogorov et l'approximation de trajectoire faiblement perturbée par l'approximation de résonance centrée (A.R.C). Une moisson de résultats nouveaux a été déduite de T_R :

- Calcul analytique des points fixes, valeurs propres et variétés stables $\mathcal{G}_n^\lambda$ associées à ces points fixes.

- Propriété universelle concernant la hiérarchie des points fixes avec la conséquence que seule $\mathcal{G}_1^1$ sert au calcul du seuil de S.G.E.

- Calcul analytique du seuil de S.G.E. d'un hamiltonien à deux degrés de liberté en bon accord avec les calculs numériques.

- Méthode analytique de calcul de seuil de S.G.E. utilisant la transformation de Kolmogorov multiple (cf. Chap. IV) qui équivaut à faire une renormalisation exacte une fois sur le hamiltonien initial. Cette méthode représente un sérieux concurrent du calcul numérique long et onéreux. Elle a été appliquée à deux hamiltoniens suggérés par la physique des plasmas.

Nous avons ainsi une transformation de renormalisation qui a l'essentiel des caractéristiques de la renormalisation exacte et qui en est proche tant du point de vue des caractéristiques des points fixes que de celui des seuils de stochasticité de grande échelle. Le problème reste ouvert de savoir si cette proximité peut être prouvée en montrant que T_R est le premier maillon d'une suite convergente d'approximations de la renormalisation exacte. Mac Kay [35] et Kadanoff [36] ont construit une transformation de renormalisation pour les applications discrètes préservant les aires qui est plus proche de la rigueur mathématique que T_R. Cependant, leur transformation ne peut que donner une description locale des points fixes. Elle opère sur un espace fonctionnel qui possède un continuum de dimensions et les techniques disponibles actuellement ne permettent pas de calculer, même de façon approchée, les variétés stables de ces points fixes (utilisées pour le calcul du seuil de S.G.E). En particulier la hiérarchie des points fixes que nous avons montrée pour T_R n'est pas démontrable dans leur cas.

Si la transition à la stochasticité de grande échelle pour les systèmes hamiltoniens à deux degrés de liberté est maintenant bien décrite pour les besoins du physicien, la description du chaos lui-même en est encore à ses balbutiements. Il reste en particulier à donner une description de la diffusion tant qu'il existe des îlots stochastiques dans le système, ce qui donne un comportement de type intermittent du mouvement. Pour les systèmes hamiltoniens à plus de deux degrés de liberté la stochasticité de grande échelle apparaît de façon plus continue comme l'envahissement de tout l'espace des phases par la diffusion d'Arnold [11]. Le calcul de cette diffusion et l'évaluation de son extension dans l'espace des phases en sont encore à leur début [11].

APPENDICE I

Mouvement d'une particule chargée dans le champ de deux ondes longitudinales

Ce mouvement est décrit par le hamiltonien :

$$H\ (p,z,t) = \frac{p^2}{2m} - q\ V_1 \cos\ (k_1 z - \omega_1 t) - q\ V_2 \cos\ (k_2 z - \omega_2 t) \qquad (1)$$

où k_i, ω_i, V_i sont les nombres d'ondes, les fréquences et les amplitudes associées au deux ondes (i = 1,2),

m est la masse de la particule et q sa charge,

z est la position de la particule et p son impulsion.

La transformation canonique de fonction génératrice :

$$F\ (p,x,t) = p\ (x + \omega_1 t)\ \ k_1 + \lambda x + \mu t$$

où $\lambda = -\omega_1 m\ \ k_1^2$ et $\mu = k_1^2\ \lambda^2/2m + \lambda\omega_1$, définit les nouvelles variables conjuguées $x = k_1 z - \omega_1 t$ et $u = p/k_1 + \lambda$ dont l'évolution est décrite par le hamiltonien.

$$\mathcal{H}(u,x,t) = \frac{k_1^2\ u^2}{2m} - q\ V_1 \cos x - q\ V_2 \cos\ (kx - \omega t)$$

où $k = k_2/k_1$ et $\omega = k_2\ \Delta v$ avec $\Delta v = \frac{\omega_2}{k_2} - \frac{\omega_1}{k_1}$.

Cette transformation correspond au passage du référentiel du laboratoire au référentiel se déplaçant à la vitesse de phase ω_1/k_1 de l'onde i = 1. Définissons un nouveau temps $t' = \omega t/k$ et une nouvelle vitesse $v = k_1\ u/\Delta v$. L'évolution de (x, v) est décrite par :

$$H'(v,x,t') = \frac{v^2}{2} - M \cos x - P \cos k (x - t)$$

où $M = \frac{qV_1}{m\Delta v^2}$ et $P = \frac{qV_2}{m\,\Delta v^2}$

Le mouvement d'une particule dans deux ondes longitudinales est donc caractérisé par trois paramètres (M, P et k).

APPENDICE II

Calcul des coefficients $A^{(I)}_{\alpha\beta}$, ..., $G_{\alpha\beta\alpha'\beta'}$ (I)

La transformation canonique définie par la fonction génératrice donnée par (2.4.3), définit de nouvelles variables conjuguées I et θ reliées à (v, x) par la relation (2.4.4) ; dans lesquelles le hamiltonien (2.4.1) s'écrit sous la forme donnée par (2.4.5) où :

$$A_{\alpha\beta}(I) = \frac{(1 + \alpha I + \beta I^2)(1 - \alpha I - 3\beta I^2)}{2 I^2}$$

$$B_{\alpha'\beta'}(I) = \frac{(1 + \alpha' J + \beta' J^2)(1 - \alpha' J - 3\beta' J^2)}{2 J^2}$$

où : $J = 1 - I$

$$C_{\alpha\beta\alpha'\beta'}(I) = [(1 + \alpha I + \beta I^2)(\alpha' J + 2\beta' J^2) + (1 + \alpha' J + \beta' J^2)(\alpha I + 2\beta I^2)$$

$$- (1 + \alpha I + \beta I^2)(1 + \alpha' J + \beta' J^2)] / IJ$$

$$D_{\alpha\beta}(I) = - \beta \frac{(1 + \alpha I + \beta I^2)^2}{I^2}$$

$$E_{\alpha'\beta'}(I) = - \beta' \frac{(1 + \alpha' J + \beta' J^2)^2}{J^2}$$

$$F_{\alpha\beta\alpha'\beta'}(I) = \frac{2\beta}{IJ}(1 + \alpha I + \beta I^2)(1 + \alpha' J + \beta' J^2) - \beta' \frac{(1 + \alpha I + \beta I^2)^2}{I^2}$$

$$G_{\alpha\beta\alpha'\beta'}(I) = \frac{2\beta'}{IJ}(1 + \alpha I + \beta I^2)(1 + \alpha' J + \beta' J^2) - \beta \frac{(1 + \alpha' J + \beta' J^2)^2}{J^2}$$

APPENDICE III

Calcul des coefficients $K_{\ell m}(I)$

La transformation de Kolmogorov de fonction génératrice

$$F(I,x,t) = Ix + (M \sin x)/I + \left(P \sin k(x-t)\right)/k(I-1) \qquad (1)$$

définit de nouvelles variables conjuguées I et Θ reliées aux variables v et x par

$$\Theta = \frac{\partial F}{\partial I} = x - \left(M \sin x\right)/I^2 - \left(P \sin k(x-t)\right)/k(I-1)^2 \qquad (2)$$

$$v = \frac{\partial F}{\partial x} = I + \left(M \cos x\right)/I + \left(P \cos k(x-t)\right)/(I-1) \qquad (3)$$

dans lesquelles le hamiltonien (1) s'écrit

$$H^{(4)}(I,\Theta,t) = \frac{I^2}{2} + \frac{M^2}{4I^2} + \frac{P^2}{4(I-1)^2}$$

$$+ \frac{M^2}{4I^2} \cos 2x(I,\Theta) + \frac{P^2}{4(I-1)^2} \cos 2k\left(x(I,\Theta) - t\right)$$

$$+ \frac{MP}{2I(I-1)}\left[\cos\left((k+1)x - kt\right) + \cos\left((k-1)x - kt\right)\right] \qquad (4)$$

Si l'on définit $A_{\ell m}^{\mu\lambda}$ par

$$\cos\left[(\mu k+\lambda)x(I,\Theta) - \mu kt\right] = \sum_{\ell \geqslant 0} \sum_{m} A_{\ell m}^{\mu\lambda} \cos\left[(mk+\ell)\Theta - mkt\right] \qquad (5)$$

il résulte immédiatement de (4) que

$$K_{\ell m}(I) = M^2 A_{\ell m}^{\circ 2} / (4I^2) + P^2 A_{\ell m}^{2\circ} / \left(4(I-1)^2\right)$$

$$+ MP\left(A_{\ell m}^{1\ 1} + A_{\ell m}^{-1\ 1}\right) / \left(2I(I-1)\right) \qquad (6)$$

D'après (5)

$$A_{\ell m}^{\mu\lambda} = \frac{2}{2\pi T} \int_0^{2\pi} \int_0^{T} \cos\left[(\mu k+\lambda) x(I,\theta) - \mu k t \right] \cos\left[(mk+\ell)\theta - mkt \right] d\theta \, dt$$

où $T = 2\pi/\mu k$. De (A2) on déduit

$$A_{\ell m}^{\mu\lambda} = \frac{2}{2\pi T} \int_0^{2\pi} \int_0^{T} \cos\left[(\mu k+\lambda) x - \mu k t \right] \times \cos\left[(mk+\ell) x - mkt - (mk+\ell)\left(M \sin x/I^2 + P \sin k(x-t)/\left(k(I-1)^2\right)\right)\right] \frac{d\theta}{dx} \, d x \, dt \qquad (7)$$

Dérivant (2) on obtient

$$\frac{d\theta}{dx} = 1 - M \cos x / I^2 - P \cos k(x-t) / (I-1)^2 \qquad (8)$$

d'où il résulte que

$$A_{\ell m}^{\mu\lambda} = C_{\ell m}^{\mu\lambda} - M\left(C_{\ell m}^{\mu\lambda+1} + C_{\ell m}^{\mu\lambda-1} \right) / (2I^2) - P\left(C_{\ell m}^{\mu+1\ \lambda} + C_{\ell m}^{\mu-1\ \lambda} \right) / \left(2(I-1)^2\right) \qquad (9)$$

où

$$C_{\ell m}^{\mu\lambda} = \frac{2}{2\pi T} \int_0^{2\pi} \int_0^{T} dx \, dt \cos\left[(\mu k+\lambda) x - \mu k t \right] x \cos\left[(mk+\ell) x - mkt - y \sin x - z \sin k(x-t) \right] \qquad (10)$$

où l'on introduit

$$\begin{cases} y = (mk+\ell)\ M / I^2 & (11a) \\ z = (mk+\ell)\ P / \left(k(I-1)^2\right) & (11b) \end{cases}$$

A l'aide des développements

$$\cos(y \sin x) = J_0(y) + 2 \sum_{\ell \geqslant 0} J_{2\ell}(y) \cos 2\ell x \qquad (12a)$$

$$\sin(y \sin x) = 2 \sum_{\ell \geqslant 0} J_{2\ell+1}(y) \sin(2\ell+1)x \qquad (12b)$$

où J_n désigne la fonction de Bessel de première espèce, on obtient

$$C_{\ell m}^{\mu\lambda} = \sum_{\nu = \pm 1} \eta^{\ell''} \varepsilon^{m''} J_{\ell''}(y) J_{m''}(z) \qquad (13a)$$

où $\ell' = \ell + \nu\lambda, \quad m' = m + \nu\mu$ 13b)

$$\ell'' = |\ell'|, \quad m'' = |m'| \qquad (13c)$$

et $$\eta = \operatorname{sgn}(\ell'), \quad \varepsilon = \operatorname{sgn}(m') \qquad (13d)$$

où $\operatorname{sgn}(u) = +1$ (resp. -1) pour $u \geqslant 0$ (resp. $u < 0$).
De (6), (9), (11), (13) on déduit donc l'expression des $K_{\ell m}(I)$.

Pour y et z petits, les fonction de Bessel peuvent être développées à l'ordre le plus bas et l'on obtient les expressions beaucoup plus simples

$$K_{\ell m}(I) = (mk+\ell)^{m+\ell-3} M^{\ell} P^{m} \left[\ell m k(k+1) / \left(I(I-1)\right) + \ell\left(\ell-1\right) / \left(I-1\right)^2 + k^3 m\left(m-1\right) / I^2 \right] / \left(\ell!\, m!\, 2^{\ell+m-1} k^m I^{2\ell-2} (I-1)^{2m-2} \right) \qquad (14)$$

pour $\ell \geqslant 1$, $m \geqslant 1$.

A P P E N D I C E IV

Justification complémentaire de l'approximation à deux résonances pour l'établissement de T_R. (Cas où $k = k_1^1$ et $n = \lambda = 1$)

Après une transformation de Kolmogorov opérée sur le hamiltonien (3.2.1) toutes les résonances possibles de vitesse $v_{\ell m} = mk/(mk + \ell)$ sont engendrées. Avec les unités correspondant au système obtenu après J itérations, l'amplitude des résonances est multipliée par $(\beta\sigma)^J$.

Soit :
$$A_{\ell m}^{(J)} = (\beta(k)\sigma)^J K_{\ell m} \qquad (1)$$

où :
$$\beta(k) = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{k}\right]^2$$

et les coefficients $K_{\ell m}$ sont donnés dans l'appendice III. On prendra $\sigma \simeq 1$ pour avoir un ordre de grandeur de $A_{\ell m}^{(J)}$.

Considérons les vitesses $v_{\ell m}$ où $\ell = F_{L+1}$ et $m = F_L$ où L est un nombre entier. Les F_L sont les nombres de Fibonacci définis par :

$$F_0 = F_1 = 1$$

$$F_{i-1} + F_i = F_{i+1}$$

et $\lim_{i \to \infty} F_{i-1}/F_i = g - 1$ où g est le nombre d'or (g = 1.618 .....).

Par ailleurs, pour la transformation de renormalisation simplifiée donnée par (3.3.7) (où seule la contribution des $K_{\ell 1}$ est prise en compte), on peut d'après [37, 38] exprimer les amplitudes des résonances après J itérations, on obtient :

$$M_J = a^{F_{2J-1}} \; b^{F_{2J-2}-1} \; M_o^{F_{2J}} \; P_o^{F_{2J-1}}$$

$$P_J = a^{F_{2J-2}-1} \; b^{F_{2J-3}+1} \; M_o^{F_{2J-1}} \; P_o^{F_{2J-2}} \qquad (2)$$

où : $a = a_1^1(k)$ et $b = b_1^1(k)$ donnés par (3.3.12).

La résonance M_J correspond à une vitesse :

$$v_M = \frac{F_{2J-1}\, k}{F_{2J-1}\, k + F_{2J}} \qquad (3)$$

De même la résonance P_J, correspond à :

$$v_P = \frac{F_{2J-2}\, k}{F_{2J-2}\, k + F_{2J-1}} \qquad (4)$$

Il s'agit de comparer $A_{\ell m}$ pour $\ell = F_{2J}$ et $m = F_{2J-1}$ (resp. $\ell = F_{2J-1}$ et $m = F_{2J-2}$) avec M_J (resp. P_J). A partir de (1) et (2) on montre que :

$$\lim_{J\to\infty} \frac{A_{\ell m}}{M_J} = 0 \qquad \text{(resp. } \lim_{J\to\infty} \frac{A_{\ell m}}{P_J} = 0\text{)} \qquad (5)$$

Pour $J = 2$, on obtient : $\dfrac{A_{\ell m}}{M_J} \simeq 4.4\ 10^{-2}$ et $\dfrac{A_{\ell m}}{P_J} \simeq 2 \times 10^{-2}$

Le même raisonnement peut être appliqué au cas où n et λ sont différents de 1 et pour $k = k_n^{\lambda}$. Il est justifié de supprimer des termes résonnants dont les vitesses correspondent aux résonances primaires retenues, rencontrées lors des itérations successives de T_R.

APPENDICE V

Calcul des corrections aux points fixes et valeurs propres :
(Cas du tore nombre d'or τ_1^1 : $n = \lambda = 1$)

Le tore τ_1^1 jouant un rôle important dans la théorie, nous donnerons dans ce qui suit les corrections du second ordre en M et P du point fixe F_1^1 et des valeurs propres associées déjà déterminées à partir de la transformation de renormalisation simplifiée t_R (Cf. 3.3.13 et 3.3.20).

1. Corrections de F_1^1.

D'après (3.3.13) les corrections au premier ordre en M et P sont :

$$\begin{aligned} (M_1^1)_o &\simeq 10^{-2} \\ (P_1^1)_o &\simeq 7.65\ 10^{-2} \end{aligned} \qquad (1)$$

(l'indice zéro indique que ces quantités sont calculées au premier ordre en M et P).

D'après (3.2.7), (3.3.4) et (3.3.5), les corrections au deuxième ordre en M et P de I_M, I_P, I_o et σ_o sont :

$$I_M \simeq \Omega_M + \frac{(M_1^1)_o^2}{2\,\Omega_M^3} + \frac{(P_1^1)_o^2}{2(\Omega_M-1)^2} \qquad (a)$$

$$I_P \simeq \Omega_P + \frac{(M_1^1)_o^2}{2\,\Omega_P^3} + \frac{(P_1^1)_o^2}{2\,(\Omega_P-1)^3} \qquad (b) \qquad (2)$$

$$I_o \simeq \Omega_o + \frac{(M_1^1)_o^2}{2\,\Omega_o^3} + \frac{(P_1^1)_o^2}{2\,(\Omega_o-1)^3} \qquad (c)$$

et $$\sigma_o \simeq 1 + \frac{3}{2}\frac{(M_1^1)_o^2}{I_o^4} + \frac{3}{2}\frac{(P_1^1)_o^2}{J_o^4} \qquad (d)$$

avec Ω_M et Ω_P donnés par (3.3.6) et $\Omega_o = \dfrac{k_n^\lambda}{k + n + \delta k_n^\lambda}$

En utilisant (3.3.1), (3.3.2), (3.3.3) et (2) on obtient les corrections au second ordre de F_1^1 :

$$\begin{aligned} (M_1^1) &= (M_1^1)_o + \delta M \\ (P_1^1) &= (P_1^1)_o + \delta P \end{aligned} \qquad \text{avec :} \qquad \begin{aligned} \delta M &\simeq 6.10^{-4} \\ \delta P &\simeq 2.10^{-3} \end{aligned} \qquad (3)$$

On constate ainsi que la valeur du point fixe de t_R donne la bonne estimation pour le point fixe de la transformation de renormalisation T_R.

2. Corrections à la valeur propre δ.

En utilisant les corrections au second ordre en M et P données en (2), de I_M, I_P, I_o et σ_o ; (3.31) s'écrit :

$$M' = a_1^1(k)\, PM^2 \left[1 + M^2\left[\frac{3}{2I_o^4} - \left(\frac{a_1}{a_o} + a_2\right)\right] + P^2\left[\frac{3}{2J_o^4} - \left(\frac{b_1}{a_o} + b_2\right)\right]\right]$$

$$P' = b_1^1(k)\, PM^2 \left[1 + M^2\left(\frac{3}{2I_o^4} - c_1\right) + P_2\left(\frac{3}{2J_o^4} - c_2\right)\right] \qquad (4)$$

avec :
$$a_o = k(k+1)\,\Omega_M^{-1} + (\Omega_M - 1)^{-1}$$

$$a_1 = \frac{k(k+1)\,\Omega_M^{-5}}{2} + \frac{\Omega_M^{-3}}{2}(\Omega_M - 1)^{-2}$$

$$a_2 = \Omega_M^{-4} + \frac{\Omega_M^{-3}(\Omega_M - 1)^{-1}}{2}$$

$$b_1 = \frac{k\,(k+1)\,\Omega_M^{-2}\,(\Omega_M - 1)^{-3}}{2} + \frac{(\Omega_M - 1)^{-5}}{2}$$

$$b_2 = (\Omega_M - 1)^{-3}\,\Omega_M^{-1} + \frac{(\Omega_M - 1)^{-4}}{2}$$

et enfin :

$$c_1 = \frac{1}{2}\,\Omega_P^{-4} + \frac{1}{2}\,\Omega_P^{-3}\,(\Omega_P - 1)^{-1}$$

et

$$c_2 = \frac{(\Omega_P - 1)^{-4}}{2} + \frac{1}{2}\,(\Omega_P - 1)^{-3}\,\Omega_P^{-1}\ .$$

Pour écrire (4), on adopte les notations suivantes :

$$\begin{aligned} M' &= a_1^1(k)(1 + \alpha M^2 + \beta P^2) \\ P' &= b_1^1(k)\,(1 + \alpha' M^2 + \beta' P^2) \end{aligned} \qquad (5)$$

Pour calculer la valeur propre contractante δ_+ associée à F_1^1, on considère le flot tangent de l'application (5) ($(M, P) \to (M', P')$) en $k = k_1^1$ (point fixe) = g - 1 (où g est le nombre d'or).

En utilisant (5) et (3.3.10) on obtient :

$$\begin{pmatrix} dM' \\ dP' \end{pmatrix} = \bar{\bar{\mathcal{L}}} \begin{pmatrix} dM \\ dP \end{pmatrix} \qquad (6)$$

où :

$$\bar{\bar{\mathcal{L}}} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

avec :
$$A = 2 + 4\frac{\alpha}{b_1^1(k_1^1)} + 2\beta\frac{[b_1^1(k_1^1)]^2}{a_1^1(k_1^1)}$$

$$B = \frac{a_1^1(k_1^1)}{b_1^1(k_1^1)} + \frac{a_1^1(k_1^1)\,\alpha}{[b_1^1(k_1^1)]^4} + \frac{3\beta}{a_1^1(k_1^1)} \qquad (7)$$

$$C = \frac{[b_1^1(k_1^1)]^2}{a_1^1(k_1^1)} + \frac{3\alpha'}{a_1^1(k_1^1)} + \frac{\beta'[b_1^1(k_1^1)]^4}{[a_1^1(k_1^1)]^3}$$

$$D = 1 + \frac{\alpha'}{[b_1^1(k_1^1)]^2} + 3\beta'\frac{[b_1^1(k_1^1)]^2}{[a_1^1(k_1^1)]^2}$$

La résolution de l'équation aux valeurs propres de $\bar{\bar{\mathcal{L}}}$

$$\delta^2 - \mathrm{Tr}\,\bar{\bar{\mathcal{L}}}\,\delta + \det\bar{\bar{\mathcal{L}}} = 0 \qquad (8)$$

nous procure : $\delta_+\Big|_{\text{2ème ordre}} = 2.747$

Nous avons trouvé (Cf. 3.3.20) : $\delta_+\Big|_{\text{1er ordre}} = g^2 = 2.618.$

La correction est donc :

$$\rho = \delta_+\Big|_{\text{2ème ordre}} - \delta_+\Big|_{\text{1er ordre}} = .129 \qquad (9)$$

APPENDICE VI

Calcul de la correction c (k). (Cas où $n = \lambda = 1$)

Pour calculer la correction à l'ordre P^2 de l'équation des variétés stables $\mathcal{S}_n^\lambda$, il nous faut considérer les corrections en P^2 apportées à la transformation de renormalisation simplifiée t_R. On donnera ici le calcul pour $n = \lambda = 1$ qui correspond à $\mathcal{S}_1^1$ qui, d'après la propriété universelle soulignée en (3.4.d), apparaît comme la variété stable la plus importante pour le calcul des seuils.

Si on ajoute une correction en P^2 à t_R, cette dernière s'écrit :

$$t_R(M) = M' = a_1^1 (k) \left[1 + \beta (k) P^2\right] PM^2 \qquad (1)$$

$$t_R(P) = P' = b_1^1 (k) \left[1 + \gamma (k) P^2\right] PM \qquad (2)$$

L'équation de la variété $\mathcal{S}_1^1$, d'après (3.4.3) est :

$$P^{1/\alpha} M = R (k) \qquad (3)$$

En utilisant les relations (1) et (2) on a :

$$P'^{1/\alpha} M' = R (k')$$

soit :

$$[b_1^{1/\alpha} (k) a_1^1 (k)]^{\alpha/\alpha+1} \left[1 + \left(\frac{\gamma}{\alpha} + \beta\right) P^2\right]^{\alpha/2\alpha+1} P^{\alpha+1/(2\alpha+1)} M = [R (k')]^{\alpha/(2\alpha+1)} \qquad (4)$$

Après identification avec (3), on obtient :

$$P^{1/\alpha}\, M\, (1 + c\,(k)\, P^2) = R\,(k) \tag{5}$$

avec :
$$c\,(k) = \frac{\gamma + \beta\alpha}{1 + 2\alpha} \tag{6}$$

Il nous faut donc calculer β et γ.

En développant I et σ au premier ordre en P^2, et après avoir défini :

$$\Omega_M = \frac{k}{k+2}$$

$$\Omega_P = \frac{k}{k+1}$$

$$\Omega^* = \frac{k}{k+n+\delta k_n^{\lambda}} \quad \text{où} \quad \delta k_n^{\lambda} \text{ est donné par (3.2.28).}$$

On obtient alors :

$$\beta(k) = \frac{3}{2}\,(\Omega^* - 1)^{-4} - (\Omega_M - 1)^{-3}\,\Omega_M^{-1} - \frac{1}{2}\,(\Omega_M - 1)^{-4} -$$

$$\frac{1}{2}\,[k\,(k+1)\,\Omega_M^{-2}\,(\Omega_M - 1)^{-3} + (\Omega_M - 1)^{-5}] \,/\, [k(k+1)\Omega_M^{-1} + (\Omega_M - 1)^{-1}] \tag{7}$$

et :
$$\gamma(k) = \frac{3}{2}\,(\Omega^* - 1)^{-4} - \frac{1}{2}\,\Omega_p^{-1}\,(\Omega_p - 1)^{-3} - \frac{1}{2}\,(\Omega_p - 1)^{-4}. \tag{8}$$

REFERENCES

[1] F. DOVEIL et D. GRESILLON, Phys. Fluids, 25, 1396 (1982).

[2] M.V. BERRY, in Topics in Nonlinear Dynamics. (Ed. S. Jorna, New-York, 1978), p. 16.

[3] F. DOVEIL, "Groupe de renormalisation pour les systèmes hamiltoniens non intégrables : Application au mouvement d'une particule chargée dans un paquet d'ondes longitudinales"
Thèse de Doctorat d'Etat soutenue le 14 Janvier 1982 à l'Université Paris-VI.

[4] C.F.F. KARNEY, Phys. Fluids, 21, 1584 (1978).

[5] J.M. WERSINGER, E. OTT et J.M. FINN, Phys. Fluids, 23, 1142 (1980).

[6] M.N. ROSENBLUTH, R.Y. DAGAZIAN et P.H. RUTHERFORD, Phys. Fluids, 16, 1894 (1973).

[7] J.F. DRAKE et Y.C. LEE, Phys. Fluids, 20, 1341 (1977).

[8] J. MOSER, Lectures on Hamiltonian Systems, Memories Am. Math. Soc. 81, 1-60 (1968).

[9] V.I. ARNOLD and A. AVEZ, Ergodic Problems of Classical Mechanics, Benjamin Publ., N.Y. and Amsterdam (1968).

[10] V.I. ARNOLD : Proof of a theorem of A.N. Kolmogorov on the invariance of quasi périodic motions under small perturbations of the hamiltonian, Russian Math. surv. 18, 9-36 (1963).

[11] A.J. LICHTENBERG et M.A. LIEBERMAN, Regular and Stochastic motion, (E
Springer-Verlag, New-York, 1983).

[12] L. CHIERCHIA et G. GALLAVOTTI, Nuovo Cimento, 67B, 277 (1982).

[13] R.M.G. HELLEMAN, in Fundamental Problems in Statistical Mechanics, Vol. 5 (Cohen E.G.D., Ed.), pp. 165-233, North-Holland Publ. Co., Amsterdam and New-York, 1980.

[14] D.F. ESCANDE et F. DOVEIL, J. Stat. Phys., 26, 257 (1981).

[15] D.F. ESCANDE, Phys. Scripta, T2, 126 (1982).

[16] D.F. ESCANDE et F. DOVEIL, Phys. Letters, 83A, 307 (1981).

[17] F. DOVEIL et D.F. ESCANDE, Phys. Letters, 84A, 399 (1981).

[18] G.H. WALKER et J. FORD, Phys. Rev., 188, 416 (1969).

[19] B.V. CHIRIKOV, Phys. Reports, 52, 265 (1979).

[20] J. WISDOM, The astronomical J., 85, 1122 (1980).

[21] R.S. Mac KAY, "A renormalization approach to invariant circles in Area preserving maps", preprint présenté à la Conf. "Order in Chaos", Los Alamos, 24-28 Mai 1982.

[22] I.C. PERCIVAL, Physica, 6D, 67 (1982).

[23] D.F. ESCANDE, Physica, 6D, 119 (1982)

[24] J.P. CODACCIONI, F. DOVEIL et D.F. ESCANDE, Phys. Rev. Letters, 49, 1879 (1982).

[25] R. COHEN, in Intrinsic Stochasticity in Plasmas, p. 182 (1979), Edité par G. Laval et D. Grésillon.

[26] J.M. GREENE, J. Math. Phys., 20, 1183 (1979).

[27] G. SCHMIDT, Phys. Rev., A22, 2849 (1980).

[28] A. GARREN et al., Individual Particle Heating and the Effect of Scattering in an Axially Magnetic Field, Proc. 2nd Int. Conf. on Peaceful Uses of Atomic Energy, 31 (1958), 65.

[29] R.J. HASTIE, G.D. HOBBS et J.B. TAYLOR, Non Adiabatic Behavior of Particles in Inhomogeneous Magnetic Fields, Proc. 2rd. Int. Conf. on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, Novosibirsk, 1968 (Int. Atom. Energy Agency, Vienne, 1969), Vol. 1, p. 389.

[30] R.H. COHEN, G. ROWLANDS et J. FOOTE, Phys. Fluids, 21, 627 (1978) et Erratum, Phys. Fluids, 22, 1006 (1979).

[31] I.S. GRADSHTEYN et I.M. RYZHIK, Table of integrals, series and products, p. 7, Academic Press (1980).

[32] D.F. ESCANDE et F. DOVEIL, Proc. of the Int. Conf. on Plasma Physics, (Nagoya), Vol. 1, 387 (1980). Editor : Fusion Research Association of Japan.

[33] D.F. ESCANDE, in Intrinsic Stochasticity in Plasmas, p. 41 (1979), Edité par G. Laval et D. Grésillon.

[34] B.V. CHIRIKOV, Proc. of Int. Conf. on Plasma Physics, (Nagoya), Vol. 2, 176 (1980).

[35] R.S. MAC KAY, Thèse de PhD, Princeton University (1982).

[36] L.P. KADANOFF, Phys. Rev. Letters, 23, 1641 (1981).

[37] A. MEHR, Thèse de 3e cycle, Université de Provence, Marseille (1982).

[38] D.F. ESCANDE et A. MEHR, Phys. Letters, 91A, 327 (1982).

RESUME :

Une méthode basée sur le groupe de renormalisation nous permet de déterminer les seuils de stochasticité grande échelle des systèmes hamiltoniens à deux degrés de liberté et d'observer un comportement universel de ces derniers. On fait une application de cette méthode à des problèmes de la physique des plasmas où la stochasticité intrinsèque intervient.

MOTS CLES.

Groupe de renormalisation, seuils de stochasticité grande échelle, systèmes hamiltoniens, universalité, physique des plasmas.